Prérequis. Principe du maximum, inégalité de Hölder

Théorème 0.0.1 (des trois droites de Hadamard)**.** *On note $\mathcal{B}$ la bande des complexes de partie réelle comprise (strictement) entre 0 et 1. Soit $f : \overline{\mathcal{B}} \to \mathbf{C}$ une fonction continue sur $\overline{\mathcal{B}}$, bornée sur $\partial\mathcal{B}$, et holomorphe sur $\mathcal{B}$. Alors en posant $M(\theta) = \sup_{\mathfrak{Re}(z)=\theta} |f(z)|$, on a l'inégalité de log-convexité :*

$$M(\theta) \leqslant M(0)^{1-\theta} M(1)^{\theta}$$

pour tout $\theta \in [0,1]$.

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ quelconques, et :

$$f_{\varepsilon,\lambda}(z) = \mathrm{e}^{\varepsilon z^2 + \lambda z} f(z).$$

Choisissons un $R > 0$ assez grand pour que le raisonnement suivant soit valide. On applique le principe du maximum à $f_{\varepsilon,\lambda}$ qui est holomorphe sur le rectangle $\mathcal{R} = [0,1] + \mathrm{i}[-R,R]$. Si R a été choisi assez grand (et si f n'est pas identiquement nulle) alors on peut trouver z_0 à l'intérieur de $\mathcal{R}$ tel que $f_{\varepsilon,\lambda}(z_0) \neq 0$. Par le principe du maximum, $f_{\varepsilon,\lambda}$ atteint son maximum sur le bord de $\mathcal{R}$. Montrons que cela ne peut pas se faire sur les bords en haut et en bas.

Si c'est le cas, alors pour $z = x \pm \mathrm{i}R$ on aurait :

$$|f_{\varepsilon,\lambda}(z)| = \mathrm{e}^{\varepsilon(x^2-R^2)+\lambda x} |f(z)| \leqslant \mathrm{e}^{\varepsilon + |\lambda| - \varepsilon R^2} \|f\|_{\infty,\mathcal{R}} < |f_{\varepsilon,\lambda}(z_0)|$$

pour un R choisi assez grand, ce qui est absurde. Donc le maximum de $f_{\varepsilon,\lambda}$ doit être atteint sur un des murs. On obtient :

$$|f_{\varepsilon,\lambda}(z)| \leqslant \max\left(\sup_{|t|\leqslant R} \mathrm{e}^{-\varepsilon t^2} |f(\mathrm{i}t)|, \sup_{|t|\leqslant R} \mathrm{e}^{\varepsilon(1-t^2)+\lambda} |f(1+\mathrm{i}t)| \right).$$

En notant $z = \theta + \mathrm{i}y$ on a alors :

$$|f(z)| \leqslant \max\left(\sup_{|t|\leqslant R} \mathrm{e}^{-\varepsilon(\theta^2-y^2)-\lambda\theta-\varepsilon t^2} |f(\mathrm{i}t)|, \sup_{|t|\leqslant R} \mathrm{e}^{-\varepsilon(\theta^2-y^2)-\lambda\theta+\varepsilon(1-t^2)+\lambda} |f(1+\mathrm{i}t)| \right).$$

On fait finalement tendre R vers $+\infty$ et ε vers 0 pour obtenir :

$$|f(z)| \leqslant \max\left(\mathrm{e}^{-\lambda\theta} M(0), \mathrm{e}^{\lambda(1-\theta)} M(1) \right),$$

ce qui donne le résultat en posant $\mathrm{e}^{-\lambda} = M(1)/M(0)$. $\square$

Théorème 0.0.2 (de Riesz-Thorin)**.** *Soient $1 \leqslant p_0, p_1, q_0, q_1 \leqslant +\infty$ quatre exposants, $(E, \mathcal{A}_E, \mu)$ et $(F, \mathcal{A}_F, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis, et T un opérateur linéaire continu de $\mathrm{L}^{p_0}(E)$ dans $\mathrm{L}^{q_0}(F)$, qui est aussi un opérateur linéaire continu de $\mathrm{L}^{p_1}(E)$ dans $\mathrm{L}^{q_1}(F)$. Alors pour tout $\theta \in [0,1]$, en posant :*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1},$$

l'opérateur T est aussi linéaire continu de $\mathrm{L}^p(E)$ dans $\mathrm{L}^q(F)$. De plus, en notant $M(\theta) = \|T\|_{\mathrm{L}^p(E)\to\mathrm{L}^q(F)}$, on dispose de l'inégalité de log-convexité :

$$M(\theta) \leqslant M(0)^{1-\theta} M(1)^\theta.$$

Démonstration. On se fiche des cas limites qui sont automatiques, on suppose donc que $1 < p, q < +\infty$ et que $\theta \in]0,1[$. Remarquons que pour $f \in \mathrm{L}^q(F)$, on peut par dualité calculer sa norme de la manière suivante :

$$\|f\|_q = \sup_{\|g\|_{q'}=1} \int_F f\overline{g} \,\mathrm{d}\nu$$

où q' est l'exposant conjugué de q. On montre alors simplement que pour $\|f\|_{\mathrm{L}^p(E)} = 1$ et pour $\|g\|_{\mathrm{L}^{q'}(F)} = 1$, on a :

$$\int_F Tf \cdot \overline{g} \,\mathrm{d}\nu \leqslant M(0)^{1-\theta} M(1)^\theta.$$

Pour cela, on applique le théorème des trois droites à une fonction bien choisie. On pose pour $z \in \mathcal{B}$:

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}, \qquad \frac{1}{q(z)} = \frac{1-z}{q_0} + \frac{z}{q_1},$$
$$\frac{1}{p'(z)} = \frac{1-z}{p'_1} + \frac{z}{p'_2}, \qquad \frac{1}{q'(z)} = \frac{1-z}{q'_1} + \frac{z}{q'_2},$$

de sorte à avoir toujours $p(z)$ et $p'(z)$ (resp. $q(z)$ et $q'(z)$) qui sont des exposants conjugués, et à avoir $p(\theta) = p$ et $q(\theta) = q$. On pose alors :

$$F(z) : x \in E \mapsto |f(x)|^{p/p(z)} \frac{f(x)}{|f(x)|},$$
$$G(z) : y \in F \mapsto |g(y)|^{q'/q'(z)} \frac{g(y)}{|g(y)|},$$
$$\varphi(z) = \int_F TF(z) \cdot \overline{G(z)} \,\mathrm{d}\nu,$$

en posant $F(z)(x) = 0$ (resp. $G(z)(y) = 0$) lorsque $f(x)$ (resp. $g(y)$) est nul. On a alors $F(\theta) = f$ et $G(\theta) = g$, et il suffit donc de montrer que :

$$\varphi(\theta) \leqslant M(0)^{1-\theta} M(1)^\theta.$$

On applique le théorème des trois droites à φ. On obtient $\varphi(\theta) \leqslant N(0)^{1-\theta} N(1)^\theta$ avec $N(t) = \sup_{\mathfrak{Re}(z)=t} |\varphi(z)|$. On a juste à montrer que $N(0) \leqslant M(0)$ et que $N(1) \leqslant M(1)$. Montrons-le par exemple pour 0. Si $\mathfrak{Re}(z) = 0$, alors par Hölder :

$$|\varphi(z)| = \left| \int_F TF(z) \cdot \overline{G(z)} \,\mathrm{d}\nu \right| \leqslant \|TF(z)\|_{q_0} \|G(z)\|_{q'_0} \leqslant M(0) \|F(z)\|_{p_0} \|G(z)\|_{q'_0}.$$

Or, comme $\mathfrak{Re}(z) = 0$ on a $\mathfrak{Re}(p/p(z)) = p/p_0$ d'où :

$$\|F(z)\|_{p_0}^{p_0} = \int_E |F(z)|^{p_0} \, \mathrm{d}\mu = \int_E |f|^p \, \mathrm{d}\mu = 1$$

et de même $\|G(z)\|_{q_0'} = 1$. Cela conclut.

Pour pouvoir utiliser le théorème des trois droites, il faudrait vérifier que φ (qui est clairement continue sur $\overline{\mathcal{B}}$ et bornée sur $\partial\mathcal{B}$) est holomorphe sur $\mathcal{B}$. Mais en fait il n'y a pas besoin de le vérifier pour le cas général. Avec un passage à la limite, il suffit de le vérifier pour le cas où f et g sont étagées à supports de mesure finie, et dans ce cas $\varphi(z)$ est une combinaison linéaire d'intégrales du type $\int_F T\mathbf{1}_{A_i} \cdot \overline{\mathbf{1}_{B_j}} \, \mathrm{d}\nu$, qui sont de la forme $\alpha\beta^z$ donc holomorphes. $\square$

Remarques.

— Le développement est clairement beaucoup trop long pour quinze minutes, il faut alors aller vite sur certains points. Par exemple on peut s'éviter d'écrire toutes les marjorations dans la démonstration des trois droites, en disant à l'oral ce que l'on fait. Les détails pourront être écrits lors des questions s'il le faut. De même pour l'application du théorème des trios droites, pour la dualité, et pour la conclusion.

— Il y a des applications directes de ce théorème même au niveau de l'agreg. Par exemple on peut prendre pour T la transformée de Fourier qui est à la fois définie $\mathrm{L}^1 \to \mathrm{L}^\infty$ et $\mathrm{L}^2 \to \mathrm{L}^2$. On obtient une transformée de Fourier sur L^p pour tout $p \in [1, 2]$, à valeurs dans L^q avec un certain $q \in [2, +\infty]$. On peut même majorer sa norme d'opérateur avec l'inégalité de log-convexité, mais elle n'est atteinte que pour les deux transformées de Fourier que l'on connaît déjà. On peut aussi l'appliquer à l'opérateur des coefficients de Fourier $\mathrm{L}^2 \to \ell^2$ et $\mathrm{L}^1 \to \ell^\infty$, pour obtenir l'*inégalité de Hausdorff-Young* :

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(n)|^q\right)^{1/q} \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^p \, \mathrm{d}t\right)^{1/p},$$

pour $1 \leqslant p \leqslant 2$ et q son exposant conjugué. Une dernière application facile est la convolution par une fonction L^1, qui définit un opérateur $\mathrm{L}^1 \to \mathrm{L}^1$ mais aussi $\mathrm{L}^\infty \to \mathrm{L}^\infty$.

— Pour pouvoir écrire $\int Tf \cdot \overline{g} \, \mathrm{d}\nu$, on suppose déjà que Tf est dans L^q, donc que T définit un opérateur linéaire de L^p dans L^q. En fait cette partie est facile, puisque une fois T défini sur L^{p_0} et sur L^{p_1}, on le définit sur les L^p par densité. Si on hésite, on peut se contenter de démontrer tout le résultat pour f et g continues à support compact, avec les espaces mesurés qui sont des ouverts de $\mathbf{R}^n$ avec la mesure de Lebesgue.

— Attention au livre de Zuily et Queffélec qui fait des grands détours. Il vaut mieux énoncer le théorème dans le cas d'ouverts de $\mathbf{R}^n$ avec la mesure de Lebesgue et faire la démonstration simple plutôt que d'essayer d'adapter la preuve du livre.

— Le théorème des trois droites a un analogue circulaire qui en est aussi un corollaire (en considérant l'exponentielle de f) : on remplace la bande par la couronne

$\{r < |z| < R\}$, et le supremum sur les droites verticales devient un supremum sur les cercles intermédiaires ; le reste de l'énoncé est le même.

— Attention le théorème est d'un haut niveau, et le jury risque de poser des questions sur l'interpolation des espaces de fonctions. Le théorème de Riesz-Thorin est historiquement le point de départ de l'interpolation des espaces de Banach, et énonce que L^p est un espace d'interpolation entre L^{p_0} et L^{p_1} pour tout $p \in [p_0, p_1]$. La théorie de l'interpolation a été appliquée aux espaces L^p, aux espaces de Sobolev, aux espaces de Besov, ...

Recasages.

— 201 : Le théorème est à la base de l'interpolation des espaces de Banach, qui sont presque toujours des espaces de fonctions. Donc c'est dans le thème, attention à ne pas faire une leçon trop hétérogène.

— 206 : J'avais besoin d'un deuxième développement dans cette leçon qui est mon impasse. Mon idée est que l'on utilise le théorème des trois droites, qui est un théorème en dimension un (ou deux), pour énoncer un théorème en dimension infinie, utile en analyse. L'analogie s'arrête ici, donc je ne conseille pas vraiment.

— 208 : C'est très bien, surtout si l'on fait une partie sur les espaces L^p, ce qui est incontournable. En plus on utilise des techniques de dualité pour calculer des normes, ce qui est apprécié.

— 219 : C'est surtout pour le théorème des trois droites, qui est un principe du maximum. C'est vraiment une bonne idée de faire une partie sur les principes du maximum en analyse complexe, et le théorème de Riesz-Thorin en est une application spectaculaire. Comme le développement est trop long, on pourrait presque se contenter du théorème des trois droites, et si jamais il reste du temps, rajouter celui des trois cercles ou expliquer rapidement la démonstration de Riesz-Thorin.

— 234 : C'est comme pour la leçon 208, ça rentre bien. En plus ici on peut l'appliquer à tous les opérateurs de Fourier que l'on connaît.

— 245 : Pour le théorème des trois droites, et les principes du maximum en général (comme pour la leçon 219). Le théorème de Riesz-Thorin est une application qui ne doit pas prendre trop de place dans le développement : on s'attarde surtout sur les questions d'analyse complexe du début.

— 253 : Le théorème en lui-même n'est pas une utilisation de la convexité à proprement parler, mais les corollaires en sont. On peut par exemple démontrer les trois droites et les trois cercles, passer rapidement sur Riesz-Thorin, et donner des corollaires au théorème pour expliquer en quoi l'inégalité de log-convexité est intéressante. Mais ça reste un peu limite.

— 267 : Ici par contre le développement rentre très bien ! Les courbes dans le plan complexe sont un peu trop souvent reléguées au rang de chemins d'intégration, alors que l'on peut les utiliser pour démontrer des résultats beaucoup plus forts sur des espaces L^p. En plus, on *utilise* réellement ces droites.