Prérequis. Connexité par arcs, centre, générateurs et structure de $\mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$

Théorème 0.0.1. *Le groupe* $\mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$ *est simple.*

Démonstration. On rappelle qu'il est connexe par arcs, de centre trivial et engendré par les retournements, qui y sont tous conjugués.

Soit H un sous-groupe distingué non trivial de $\mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$. On montre que H contient un retournement.

Pour $1 \neq h \in H$, on pose :

$$\varphi_h : \begin{aligned} \mathrm{SO}(3, \mathbf{R}) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ g &\longmapsto \operatorname{tr}[g, h] \end{aligned}$$

qui est continue. Comme la trace d'un élément de $\mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$ est de la forme $1 + 2\cos\theta$, l'image de ϕ est contenue dans $[-1, 3]$. Par connexité et compacité de $\mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$, l'image est connexe et compacte, et contient $\varphi_h(1) = 3$. Donc l'image est de la forme $[a, 3]$ avec $a \leqslant 3$.

Si $a = 3$, alors $[g, h] = 1$ pour tout $g \in \mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$ donc h est central donc trivial, ce que l'on a exclu.

Donc $a < 3$. Pour n assez grand on a alors :

$$a < 1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) < 3$$

et l'on peut alors trouver un $g_n \in \mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$ tel que $\varphi_h(g_n)$ soit ce nombre au milieu. Ainsi, $h_n = [g_n, h]$ est une rotation d'angle $\pm\pi/n$ qui appartient à H, et alors h_n^n est un retournement dans H.

Ainsi H contient un retournement, donc (comme ils sont tous conjugués dans $\mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$) il les contient tous, donc il contient le sous-groupe engendré par les retournements, qui est $\mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$ tout entier. Donc $\mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$ est un groupe simple. □

Remarques.

- On passe plein de petits résultats sous le tapis, qu'il faut savoir démontrer :
  - $\mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$ est connexe par arcs :
    On passe d'une matrice de rotation R_θ^ξ autour d'un axe $\xi \in \mathbf{R}^3 \backslash \{0\}$ à l'identité par le chemin $t \mapsto R_{t\theta}^\xi$ qui reste dans $\mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$.
  - Son centre est trivial :
    Si u est dans le centre, alors il commute avec tous les retournements donc il stabilise tous les plans. Il stabilise donc aussi les intersections de plans, c'est-à-dire les droites : c'est une homothétie. En dimension impaire, il n'y a que l'identité qui reste dans le groupe spécial orthogonal.

— Il est engendré par les retournements :
  Comme le groupe orthogonal est engendré par les réflexions, un élément non trivial u est toujours produit d'un nombre pair de réflexions. En dimension 3, deux réflexions τ_1 et τ_2 suffisent. Mais alors $-\tau_i$ est un retournement et $u = (-\tau_1)(-\tau_2)$. En dimension quelconque, il faut d'abord expliquer pourquoi si τ_1 et τ_2 sont des réflexions, il existe toujours deux retournements σ_1 et σ_2 tels que $\tau_1\tau_2 = \sigma_1\sigma_2$. Si l'on demande d'expliquer pourquoi le groupe orthogonal est engendré par les réflexions : soit u dans le groupe orthogonal, on raisonne par récurrence sur la codimension p du sous-espace des points fixes de u pour montrer qu'il est produit d'au plus p réflexions. On prend un vecteur x orthogonal aux points fixes, et y son image par u qui reste orthogonale aux points fixes. Ils sont de même norme, et alors $x+y$ et $x-y$ sont orthogonaux : on compose par la réflexion dirigée par $x-y$ pour faire diminuer strictement p. Ce théorème reste vrai si la forme quadratique est quelconque, mais c'est plus technique.

— Les retournements sont tous conjugués dans $\mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$:
  Si v est un retournement de plan V et w un retournement de plan W, on complète des bases orthonormées à tout l'espace et l'on peut toujours trouver une transformation orthogonale qui envoie V sur W ; quitte à changer un signe cette transformation est de déterminant 1, et elle conjugue v en w.

Recasages.

— 103 : Un résultat de simplicité qui utilise le fait que les retournements soient conjugués dans $\mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$. Ce développement est proposé dans le rapport de jury, donc pourquoi pas.

— 106 : Très bien si l'on fait une partie sur les sous-groupes importants du groupe linéaire et/ou sur l'aspect géométrique. Les raisonnements avec les retournements, les réflexions etc sont souvent appréciés car rarement bien maîtrisés.

— 108 : Il faut alors mettre l'accent très fort sur le fait que les retournements engendrent $\mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$, voire même le démontrer au début du développement (qui est assez court).

— 160 : Les retournements sont des endomorphismes remarquables, et le titre de cette leçon est assez vague donc ça doit pouvoir rentrer sans problème.

— 204 : On utilise de manière assez forte la connexité du groupe pour établir un résultat qui est purement algébrique. C'est en cela que ce théorème est plus intéressant que la simplicité du groupe alterné : il fait un pont avec l'analyse.