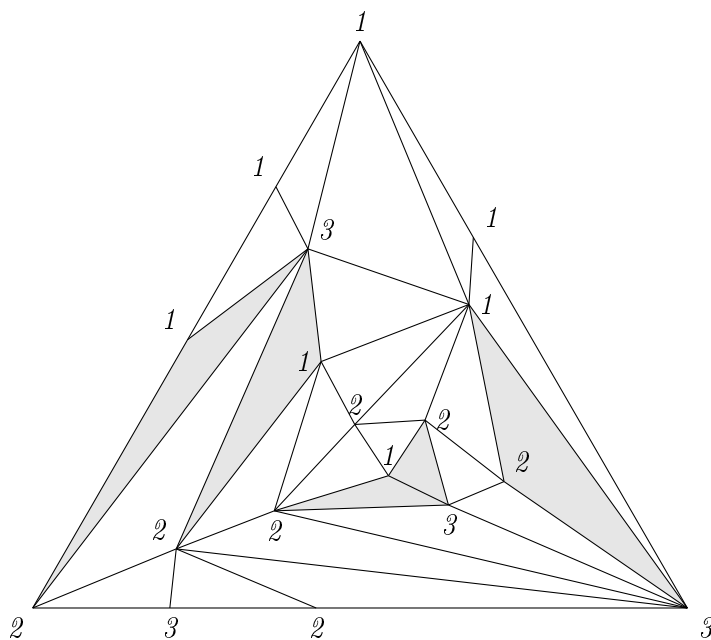
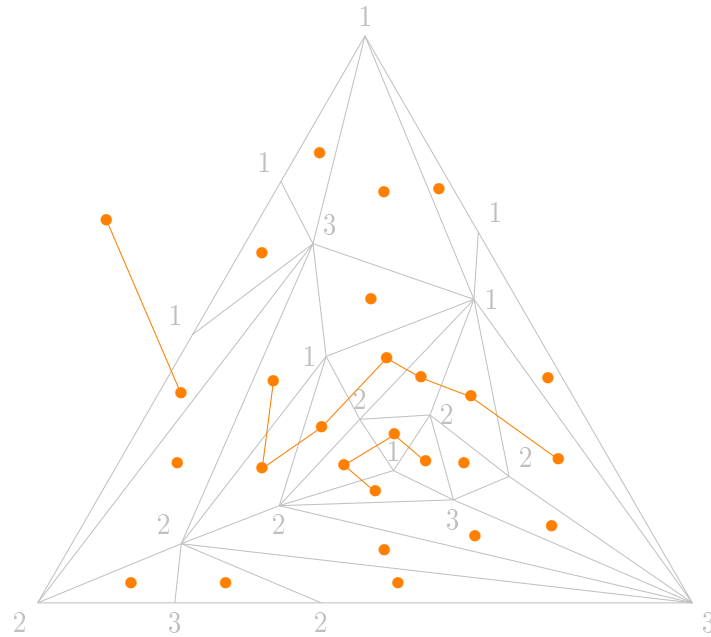


**Prérequis.** Aucun.

**Lemme 0.0.1** (de Sperner). Soient  $P_1P_2P_3$  un triangle et  $\mathcal{T}$  une triangulation de celui-ci. Pour tout coloriage  $c : \mathcal{T}_{\text{sommets}} \rightarrow \{1, 2, 3\}$  des sommets de  $\mathcal{T}$  en trois couleurs avec  $c(P_i) = i$  et  $c(A) \in \{i, j\}$  pour tout sommet  $A \in [P_iP_j]$ , il existe un petit triangle de  $\mathcal{T}$  qui est tricolore.



*Démonstration.* On considère le graphe dual de la triangulation, c'est-à-dire le graphe avec un sommet pour chaque petit triangle, un sommet disposé hors du triangle (représentant la face extérieure), et une arête entre deux sommets lorsque les faces correspondantes partagent une arête commune dans la triangulation originale. De ce graphe dual, on ne garde que les arêtes qui coupent des anciennes arêtes coloriées 1 – 2 ou 2 – 1 :



On examine alors les degrés des sommets. Un sommet intérieur de ce graphe a un degré valant :

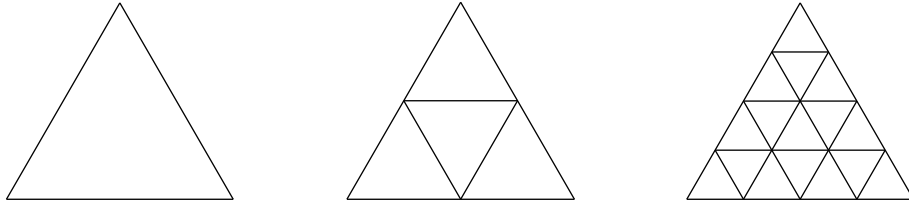
- 0 lorsque le triangle correspondant n’affiche pas les deux couleurs 1 et 2 ;
- 1 lorsque le triangle correspondant est tricolore ;
- 2 lorsque le triangle correspondant n’affiche pas la couleur 3 ;
- 3 dans aucun cas.

Le degré du sommet extérieur est toujours impair car il y a un nombre impair de changements entre 1 et 2 le long du segment  $[P_1P_2]$ . Or, la somme de tous les degrés des sommets d’un graphe vaut deux fois le nombre d’arêtes, donc est paire. Ainsi, la somme des degrés des sommets intérieurs est impaire, donc il y a un nombre impair de triangles tricolores (qui sont les seuls avec un degré impair).  $\square$

On se sert du lemme purement combinatoire de Sperner pour obtenir une démonstration du théorème de Brouwer en dimension deux.

**Théorème 0.0.2** (de Brouwer). *Toute application continue  $\mathbf{B}^2 \rightarrow \mathbf{B}^2$  admet un point fixe.*

*Démonstration.* Soient  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbf{R}^3$  et  $\Delta = \text{Conv}(e_1, e_2, e_3)$  le triangle standard. Comme  $\Delta$  et  $\mathbf{B}^2$  sont homéomorphes, il suffit de démontrer le résultat pour une application continue  $f : \Delta \rightarrow \Delta$ , dont on suppose désormais qu’elle n’admet pas de point fixe. Étant donnée une triangulation  $\mathcal{T}$  de  $\Delta$ , on note  $\delta(\mathcal{T})$  la longueur maximale de ses arêtes. On peut construire une suite  $(\mathcal{T}_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de triangulations de  $\Delta$  telle que  $\delta(\mathcal{T}_n) \rightarrow 0$ , comme suit :



Étant fixé un entier  $n \in \mathbf{N}$ , on colorie les sommets de la triangulation  $\mathcal{T}_n$  de la manière suivante. Pour tout sommet  $v$ , la différence  $f(v) - v$  n'est pas nulle et appartient à l'hyperplan  $\{x + y + z = 0\}$  donc l'une de ses coordonnées  $v_i$  est strictement négative; on colorie alors  $v$  avec la plus petite telle couleur  $i$ . Notons que si  $v \in [e_1e_2]$  alors  $v_3 = 0$  donc  $(f(v) - v)_3 \geq 0$  et  $v$  n'est pas colorié avec la couleur 3. De même pour  $[e_1e_3]$  et  $[e_2e_3]$ . En particulier,  $e_i$  est bien colorié avec la couleur  $i$ , et la coloration de  $\mathcal{T}_n$  ainsi construite vérifie les hypothèses du lemme de Sperner. Il existe alors un petit triangle tricolore  $(v^{n,1}, v^{n,2}, v^{n,3})$ , le sommet  $v^{n,i}$  étant de couleur  $i$ . Comme  $\Delta$  est compact, à extraction près la suite  $(v^{n,1})_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers un  $v \in \Delta$ . Comme  $\|v^{n,2} - v\| \leq \|v^{n,2} - v^{n,1}\| + \|v^{n,1} - v\| \leq \delta(\mathcal{T}_n) + \|v^{n,1} - v\| \rightarrow 0$ , la suite  $(v^{n,2})_{n \in \mathbf{N}}$  et de même la suite  $(v^{n,3})_{n \in \mathbf{N}}$  convergent aussi vers  $v$ . Puisque  $f$  est continue, on a  $(f(v) - v)_i \leq 0$  pour tout  $i$ . Cela est impossible puisque  $f(v) - v$  est dans l'hyperplan  $\{x + y + z = 0\}$  et est supposé non nul.  $\square$

### Remarques.

- Il faut savoir démontrer le fait que la somme de tous les degrés d'un graphe vaut deux fois le nombre d'arêtes. Si  $V$  est l'ensemble des sommets et  $E$  l'ensemble des arêtes, on peut par exemple dire que d'une part :

$$\begin{aligned} |\{(v, e) \in V \times E \mid v \text{ est un sommet de } e\}| &= \left| \prod_{e \in E} \{v \in V \mid v \text{ est un sommet de } e\} \right| \\ &= \sum_{e \in E} 2 = 2|E|, \end{aligned}$$

mais que d'autre part :

$$\begin{aligned} |\{(v, e) \in V \times E \mid v \text{ est un sommet de } e\}| &= \left| \prod_{v \in V} \{e \in E \mid v \text{ est un sommet de } e\} \right| \\ &= \sum_{v \in V} \deg v. \end{aligned}$$

- On justifie toute la fin du raisonnement à extraction près. On pourrait croire que c'est une extraction diagonale où l'on compose trois extractions, mais on n'a besoin d'extraire que pour  $(v^{n,1})$ , la même extraction fait directement converger  $(v^{n,2})$  et  $(v^{n,3})$ .
- La méthode se généralise parfaitement à toutes les dimensions. On peut définir une triangulation de Sperner d'un tétraèdre par exemple, en imposant à la coloration sur chaque face d'être une coloration de Sperner (de dimension 2). Et ainsi de suite. Et le théorème de Brouwer s'en déduit tout pareillement !

- Le théorème de Brouwer peut aussi se déduire d'un autre théorème combinatoire : il n'y a jamais de match nul au jeu de Hex.
- Le lemme de Sperner donne un algorithme assez efficace en pratique pour calculer des approximations de points fixes. Il suffit d'évaluer la fonction sur une triangulation, en déduire la coloration de Sperner, trouver un triangle tricolore, et recommencer jusqu'à avoir un triangle assez petit à notre goût.
- On déduit aussi du lemme de Sperner le théorème de Monsky : on ne peut pas partitionner un carré en un nombre impair de triangles de même aire. Les idées de la démonstration sont sur la page Wikipédia du théorème.
- Le théorème de Brouwer a énormément d'applications. Par exemple, l'existence d'équilibres de Nash en théorie des jeux, ou le théorème de Jordan.

### Recasages.

- 190 : C'est la leçon idéale, une méthode combinatoire pour démontrer un théorème utile en analyse, c'est super cool. On peut faire une sous-partie de théorie des graphes pour mettre le lemme de Sperner à l'aise, mais c'est pas obligé.
- 203 : On utilise vraiment la compacité du triangle (ou en dimension supérieure, du simplexe standard) pour déduire le théorème de Brouwer. Donc ça rentre tout pile.
- 253 : On utilise la convexité pour définir le triangle (ou en dimension supérieure, le simplexe standard). En quelque sorte on utilise le fait que l'hyperplan  $\{x+y+z = 1\}$  est convexe, mais c'est un peu tiré par les cheveux.