Prérequis. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev, théorème de Heine

Théorème 0.0.1. *Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$:*

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Alors $B_n f \to f$ uniformément sur $[0,1]$, avec vitesse en $\omega_f(1/\sqrt{n})$ où ω_f est le module de continuité de f.

Démonstration. Soit $x \in [0,1]$. On considère une suite $(X_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre x. On note $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ qui suit une loi binomiale de paramètres n et x. On a alors par formule de transfert $B_n f(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$.

Comme f est uniformément continue, pour $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|x-y| \leqslant \delta$ implique $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. On a alors :

$$\begin{aligned}
|B_n f(x) - f(x)| &\leqslant \mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbf{1}_{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|\leqslant\delta}\right] + \mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \mathbf{1}_{\left|\frac{S_n}{n}-x\right|>\delta}\right] \\
&= \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right).
\end{aligned}$$

La probabilité à la fin est majorée par Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \delta\right) \leqslant \frac{V(S_n/n)}{\delta^2} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Ainsi pour $n \geqslant \|f\|_\infty / 2\varepsilon\delta^2$ on obtient :

$$\|B_n f - f\|_\infty \leqslant \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2} \leqslant 2\varepsilon.$$

On montre maintenant que la convergence se fait en vitesse $1/\sqrt{n}$. On pose :

$$\omega_f(\delta) = \sup_{|x-y|\leqslant\delta} |f(x) - f(y)|$$

le plus grand module de continuité possible. On a :

$$|B_n f(x) - f(x)|| \leqslant \mathbb{E}\left[\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - x\right|\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\omega_f\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right|\right)\right],$$

il faut donc majorer $\mathbb{E}[\omega_f(|Y|)]$ avec $Y = \frac{S_n}{n} - x$, sachant que l'on sait ce que valent $\mathbb{E}[|Y|]$ et $\mathbb{E}[Y^2]$:

$$\mathbb{E}[|Y|] \leqslant \sqrt{\mathbb{E}[Y^2]} = \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

On montre alors que ω_f croît au plus linéairement :

Lemme 0.0.2. *Si* $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ *est continue alors pour tous* $R, \delta > 0$ *on a :*

$$\omega_g(R\delta) \leqslant (R+1)\omega_g(\delta).$$

Démonstration. On choisit $x < y \in [0,1]$ tels que $|x-y| \leqslant R\delta$, et le plus grand entier n tel que $x + n\delta \leqslant y$. Il suffit alors d'écrire :

$$g(y) - g(x) = g(y) - g(x+n\delta) + \sum_{k=0}^{n-1} g(x+(k+1)\delta) - g(x+k\delta)$$

pour obtenir le résultat. □

On en déduit qu'en choisissant $\delta > 0$ et en posant $R = |Y|/\delta$, on a :

$$\mathbb{E}[\omega_f(R\delta)] \leqslant \mathbb{E}[R+1]\omega_f(\delta) = \left(\frac{1}{\delta}\mathbb{E}[|Y|] + 1\right)\omega_f(\delta) \leqslant \left(\frac{1}{2\delta\sqrt{n}} + 1\right)\omega_f(\delta),$$

donc $\|B_n f - f\|_\infty \leqslant \left(\frac{1}{2\delta\sqrt{n}} + 1\right)\omega_f(\delta)$. On prend maintenant $\delta = 1/\sqrt{n}$ pour conclure. □

Remarques.

- Il faut faire un dessin pour expliquer le lemme, c'est même probablement suffisant pour remplacer la démonstration.
- L'inégalité sur la vitesse est optimale. On le voit en appliquant l'inégalité de Khintchine avec la fonction $x \mapsto \left|x - \frac{1}{2}\right|$.
- Si f est de classe C^2 alors la vitesse est encore plus rapide, avec Taylor-Lagrange.
- Bien sûr on vient de démontrer le théorème de densité des fonctions polynomiales dans les fonctions continues sur un compact. On peut par exemple en déduire que si $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ est continue et vérifie $\int_0^1 f(x)x^n \, \mathrm{d}x = 0$ pour tout n alors f est nulle, ou que la limite uniforme d'une suite de polynômes est encore un polynôme.

Recasages.

- 201 : Le théorème de Stone-Weierstrass est assez incontournable dans cette leçon, que ce soit sous cette forme ou sous la forme améliorée par Stone (à propos des sous-algèbres de $C^0(X)$ qui séparent les points, avec X un espace compact quelconque).
- 203 : Le théorème de Stone-Weierstrass est une application importante du théorème de Heine. On l'utilise au début de manière directe, et après en introduisant le module de continuité, qui utilise parce que f est uniformément continue.
- 209 : Ici aussi le théorème de Stone-Weierstrass est important, même si le développement n'est pas très original.
- 241 : On fabrique une suite de fonctions $(B_n f)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge uniformément, c'est donc un bon exemple de convergence uniforme, qui en plus est utile hors de la leçon.

- 264 : Les variables de Bernoulli et binomiale que l'on introduit jouent un rôle important, même si on ne les voit pas dans l'énoncé : on obtient donc une jolie application des probabilités à un autre domaine des mathématiques.
- 266 : De même que pour 264, et l'indépendance des X_j est important dans la démonstration. Attention quand même, c'est assez secondaire.