Prérequis. Théorème de Baire.

Théorème 0.0.1. *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application de classe C^∞ telle que pour tout $x \in \mathbf{R}$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $f^{(n)}(x) = 0$. Alors f est polynomiale.*

Démonstration. Posons $F_n = \{x \in \mathbf{R} \mid f^{(n)}(x) = 0\}$ pour $n \in \mathbf{N}$ et $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathring{F}_n$. On veut montrer que f est polynomiale sur chaque composante connexe de l'ouvert Ω, puis que le complémentaire X de celui-ci est vide.

Soient ainsi $]a, b[$ une composante connexe de Ω, et $[c, d]$ un segment inclus dans $]a, b[$. En fixant $x_0 \in]c, d[$, comme il est dans un $\mathring{F}_{n_0}$, on peut trouver $\alpha > 0$ tel que $f^{(n)} = 0$ sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$. Sur cet intervalle f est donc égale à un polynôme P, on va montrer que c'est le cas sur $[c, d]$. Pour cela on pose :

$$\Gamma = \{t \in]x_0, d] \mid \forall x \in [x_0, t], f(x) = P(x)\}$$

qui n'est pas vide, et l'on remarque que $M = \sup \Gamma$ ne peut pas valoir autre chose que d. En effet si $M < d$ alors on peut trouver $\eta > 0$ tel que f coïncide avec un certain polynôme Q sur $]M - \eta, M + \eta[$, mais alors P et Q coïncident sur l'ensemble infini $]M - \eta, M[$ et cela contredit le fait que M est le supremum de Γ. Ainsi $f = P$ sur $[x_0, d]$, et le même raisonnement vers la gauche montre que $f = P$ sur $[c, d]$. Comme c'est valable pour tous les segments $[c, d]$, c'est valable sur toute la composante connexe $]a, b[$.

Reste à montrer que X est vide. On commence par montrer qu'il est parfait (il est fermé et n'a pas de point isolé). Si X admet un point isolé x_0, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap X = \{x_0\}$. D'après ce qui précède, f coïncide avec un polynôme P sur $]x_0 - \varepsilon, x_0[$, et avec un polynôme Q sur $]x_0, x_0 + \varepsilon[$. En dérivant successivement en x_0, on obtient $P = Q$ d'où $f = P$ sur $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$. Ainsi cet intervalle est inclus dans un $\mathring{F}_{\deg(P)+1} \subset \Omega$ ce qui est absurde.

Supposons finalement $X \neq \emptyset$. Comme $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n = \mathbf{R}$ on a $X = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} (X \cap F_n)$. Comme X est fermé dans $\mathbf{R}$ donc complet, le théorème de Baire montre que l'intérieur d'un certain $X \cap F_{n_0}$ (pour la topologie de X) doit être non vide. Il existe donc $a < b$ dans $\mathbf{R}$ tels que :

$$]a, b[\cap X \neq \emptyset \quad \text{et} \quad]a, b[\cap X \subset F_{n_0}.$$

On choisit alors $x \in]a, b[$. Si $x \in X$ alors $f^{(n_0)}(x) = 0$. Mieux, x n'est pas isolé donc on peut y trouver une suite injective (x_p) qui tend vers x, et par théorèmes de Rolle successifs et passage à la limite, on a $f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \geqslant n_0$. Si $x \notin X$ alors $x \in \Omega$, et alors la composante connexe Ω_x de x dans Ω admet une extrémité x_0 dans $]a, b[$ (parce que $]a, b[$ intersecte X). D'après ce qui précède, f coïncide avec un polynôme P sur Ω_x. Mais $x_0 \in X \cap]a, b[$ donc d'après ce qui précède, $f^{(n)}(x_0) = 0$ pour tout $n \geqslant n_0$, d'où $\deg(P) < n_0$. En particulier $f^{(n_0)}(x) = 0$.

Dans tous les cas on a $f^{(n_0)} = 0$ sur $]a, b[$, donc $]a, b[\subset \mathring{F}_{n_0}$ ce qui est absurde. Donc X est vide, donc $\Omega = \mathbf{R}$ qui est connexe et f y est polynomiale. □

Remarques.

- Le développement est assez compliqué, donc mieux vaut avoir les idées claires. Voici un résumé des idées de la preuve :
  - f est polynomiale sur chaque composante connexe de Ω parce que l'on peut y propager la propriété locale d'être polynomiale. Il suffit donc de montrer que $\Omega = \mathbf{R}$, c'est-à-dire que X est vide.
  - On montre que X n'a pas de point isolé, un tel point étant forcément le raccordement de deux polynômes donc en fait dans Ω.
  - On montre que X est vide en supposant qu'il ne le soit pas, et en trouvant grâce au théorème de Baire un intervalle $]a, b[$ sur lequel $f^{(n_0)}$ est identiquement nulle mais qui intersecte X. Pour montrer que $f^{(n_0)}$ y est identiquement nulle, on distingue les cas où le point est dans X, et celui où le point est dans Ω en se ramenant au premier cas.
- Il faut passer un peu vite sur certains détails pour pouvoir tout expliquer, en particulier sur l'utilisation du théorème de Rolle. On dispose d'une suite injective (x_p) qui converge vers x, et l'on a $f^{(n_0)}(x_p) = 0$ pour tout p. En passant à la limite en p on trouve $f^{(n_0)}(x) = 0$. Ensuite on peut trouver, en supposant sans perdre de généralité que (x_p) est monotone, un point x'_p situé entre x_p et x_{p+1} où $f^{(n_0+1)}$ s'annule (c'est le théorème de Rolle). On obtient une nouvelle suite (x'_p) qui annule $f^{(n_0+1)}$ et à la limite on obtient $f^{(n_0+1)}(x) = 0$. On recommence par récurrence pour obtenir toutes les dérivées supérieures à n_0 qui sont nulles en x.
- Il faut pouvoir énoncer précisément le théorème de Baire, savoir le démontrer, et savoir l'utiliser dans la situation du développement. Il énonce que dans tout espace métrique complet, toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est encore d'intérieur vide (mais pas forcément fermée !). De même en passant au complémentaire, toute intersection dénombrable d'ouverts denses est encore dense (mais pas forcément ouverte !). On l'utilise dans le développement au sens suivant : si tous les $X \cap F_n$ étaient d'intérieur vide alors leur réunion le serait aussi, or X n'est pas d'intérieur vide (dans lui-même) puisque X est supposé ne pas être vide. Donc il existe un $X \cap F_{n_0}$ dont l'intérieur n'est pas vide. Pour démontrer le théorème de Baire, on choisit la version avec les ouverts denses, et l'on fixe un ouvert ω quelconque, dont on veut qu'il rencontre l'intersection $\bigcap O_n$. Pour cela, on construit par récurrence une suite de points (x_n) et une suite de rayons (η_n) qui décroît au moins géométriquement, tels que $B(x_0, \eta_0) \subset \omega$ et $\overline{B}(x_{n+1}, \eta_{n+1}) \subset B(x_n, \eta_n) \cap O_{n+1}$. La suite (x_n) est alors de Cauchy et la limite est à la fois dans tous les O_n et dans ω.
- On risque de demander une application de ce théorème. Il a été utilisé par Pinkus pour démontrer qu'un réseau de neurones à une couche cachée peut approximer toute fonction continue (pour la convergence uniforme sur tout compact) si et seulement si la fonction d'activation n'est pas polynomiale. Sinon, on peut aussi dire que les maths peuvent être une fin en soi et demander d'arrêter de toujours demander des applications à tous les théorèmes.
- On risque aussi de demander un contre-exemple si l'on ne suppose plus que l'espace de départ est complet. Comme on utilise plusieurs fois des propriétés de $\mathbf{R}$ il

faut par exemple trouver une fonction lisse, admettant une partie dense dans **R** où toutes les dérivées sauf un nombre fini s'annulent. La fonction de Fabius est un tel contre-exemple (c'est d'ailleurs une fonction lisse mais nulle part analytique). Maintenant pour une généralisation plus large ça paraît compliqué.

Recasages.

— 204 : On utilise plein de fois la connexité, les composantes connexes, et le fait de pouvoir propager des informations locales. C'est vraiment bien, mais ce n'est pas une application d'un gros théorème de la leçon donc il faut arriver à bien le positionner. Par exemple au niveau de la définition des composantes connexes, ou après le calcul des parties connexes de **R**.

— 205 : C'est vraiment bien, on utilise la complétude de **R** avec une jolie illustration du théorème de Baire. Et on utilise le fait que les fermés dans les espaces complets sont complets (c'est pas grand chose, mais ça fait un lien de plus).

— 223 : On utilise le théorème de Baire qui utilise fortement des suites (numériques ici puisqu'on est dans **R**) et aussi le fait que X est parfait pour montrer qu'il est vide. C'est un peu léger comme lien, mais c'est probablement assez pour pouvoir mettre le développement dans cette leçon.

— 228 : Ici c'est vraiment bien, ça donne un résultat intuitif mais quand même fort et loin d'être trivial à propos des fonctions lisses sur **R**. Donc en plein milieu du thème. Et on utilise le théorème de Rolle, et des passages à la limite pour dire que des polynômes sont égaux.