Prérequis. Théorème de Cauchy-Lipschitz, sommation des relations de comparaison.

Théorème 0.0.1. *Soient $a \in \mathbf{R}$, et $q \in C^1([a,+\infty[)$ strictement positive telle que $\int_a^{+\infty} \sqrt{q} = +\infty$ et $q' = o(q^{3/2})$. Notons y une solution non nulle de l'équation de Hill-Matthieu $y'' + qy = 0$ sur $[a,+\infty[$, et $N(x)$ le nombre de zéros de y sur $[a,x]$. Alors :*

$$N(x) \sim \frac{1}{\pi} \int_a^x \sqrt{q}.$$

Démonstration. On commence par reparamétriser y, en posant $\tau(x) = \int_a^x \sqrt{q}$. C'est un C^1-difféomorphisme strictement croissant $[a,+\infty[\to [0,+\infty[$. On peut alors poser $Y = y \circ \tau^{-1}$, et en dérivant on obtient :

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sqrt{q(x)} Y'(\tau(x)), \\ y''(x) &= \frac{q'(x)}{2\sqrt{q(x)}} Y'(\tau(x)) + \sqrt{q(x)} Y''(\tau(x)). \end{aligned}$$

Ainsi de l'équation définissant y on déduit que :

$$Y'' + \phi Y' + Y = 0, \qquad \phi(t) = \frac{q'(\tau^{-1}(t))}{2q^{3/2}(\tau^{-1}(t))}.$$

On remarque que Y et Y' ne peuvent pas avoir de zéro commun, sinon par Cauchy-Lipschitz on aurait $Y = 0$ puis $y = 0$. On applique alors le lemme de relèvement suivant :

Lemme 0.0.2. *Soient $y_1, y_2 \in C^1([0,+\infty[)$ sans zéro commun. En écrivant $y_1(0) + \mathrm{i}y_2(0) = r_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$, on peut alors trouver $r, \theta \in C^1([0,+\infty[)$ tels que $y_1 = r\cos(\theta)$ et $y_2 = r\sin(\theta)$.*

On obtient ainsi r et θ tels que $Y = r\sin(\theta)$ et $Y' = r\cos(\theta)$. En dérivant on obtient :

$$\begin{aligned} Y' &= r'\sin(\theta) + r\theta'\cos(\theta) = r\cos(\theta), \\ Y'' &= r'\cos(\theta) - r\theta'\sin(\theta) = -\phi r\cos(\theta) - r\sin(\theta). \end{aligned}$$

En calculant $\cos(\theta)$ fois la première égalité moins $\sin(\theta)$ fois la seconde, on obtient $\theta' = 1 + \phi\cos(\theta)\sin(\theta)$ (car r ne s'annule pas). Ainsi $|\theta' - 1| \leqslant \frac{1}{2}|\phi|$. L'expression de ϕ montre avec les hypothèses sur q que $\phi \to 0$, donc $\theta' \to 1$, puis par sommation des relations de comparaison, $\theta(x) \sim x$ lorsque $x \to +\infty$.

On peut alors compter le nombre $M(t)$ de zéros de Y sur $[0,t]$. Pour un t_0 assez grand on a $\theta' > 0$ sur tout $[t_0,+\infty[$. On a alors :

$$\begin{aligned} M(t) - |\{u \in [0,t_0] \mid Y(u) = 0\}| &= |\{u \in [t_0,t] \mid sin(\theta(u)) = 0\}| \\ &= |\{k \in \mathbf{Z} \mid \theta(t_0) \leqslant k\pi \leqslant \theta(t)\} \sim \frac{\theta(t)}{\pi} \sim \frac{t}{\pi}. \end{aligned}$$

Le cardinal $|\{u \in [0,t_0] \mid Y(u) = 0\}|$ est fini car sinon les zéros de Y sur $[0,t_0]$ auraient un point d'accumulation et on y trouverait un zéro commun de Y et Y'. Donc $M(t) \sim t/\pi$. Enfin, $N = M \circ \tau$ ce qui donne l'équivalent annoncé.

Démonstration du lemme. On pose $\alpha = y_1 + \mathrm{i}y_2$ qui ne s'annule pas, puis :

$$\beta(x) = \int_0^x \frac{\alpha'}{\alpha} + \ln(r_0) + \mathrm{i}\theta_0.$$

Les deux fonctions α et β sont clairement de classe C^1. On a alors $(\alpha \mathrm{e}^{-\beta})' = 0$ et $\alpha(0)\mathrm{e}^{-\beta(0)} = 1$ d'où $y_1(x) + \mathrm{i}y_2(x) = \alpha(x) = \mathrm{e}^{\beta(x)}$ pour tout $x \geqslant 0$. On a alors $r = |\alpha|$ et $\theta = \mathfrak{Im}(\beta)$ qui sont bien de classe C^1. □

□

Remarques.

— Le livre de Zuily et Queffélec donne une expression explicite de r et θ dans le lemme, ce qui rallonge inutilement la démonstration car on n'utilise pas du tout ces expressions.

— Il est bien d'expliquer à l'oral pourquoi on fait chaque étape. On reparamétrise y pour se ramener à une équation où l'on voit $Y'' + Y$, et heureusement le terme $\phi Y'$ est très petit par hypothèse sur q. Ainsi Y ressemble fortement à une solution de $f'' + f = 0$, c'est pourquoi on applique le lemme. Ce lemme ne dit rien d'autre que la possibilité de trouver une fonction *module* et une fonction *argument* pour un chemin C^1 qui ne passe pas par 0.

— L'hypothèse $\int_a^{+\infty} \sqrt{q} = +\infty$ sert à faire une sommation des relations de comparaison. Cauchy-Lipschitz s'applique pour $Y'' + \phi Y' + Y = 0$ parce que ϕ est de classe C^1.

Recasages.

— 220 : C'est un très joli développement pour cette leçon, qui donne des résultats qualitatifs sur des équations que l'on ne sait pas résoudre en général. On peut le mettre juste après l'étude des équations d'ordre deux à coefficients constants, pour le voir comme une généralisation, et faire les liens avec cos et sin.

— 221 : Pareil c'est parfait, ce sont des équations linéaires mais assez complexes car les coefficients ne sont pas constants. On illustre en particulier le théorème de Cauchy-Lipschitz et la vectorialisation.

— 224 : C'est assez original puisque l'on donne un développement asymptotique d'une fonction qui est loin d'être usuelle. Et on fait un pont avec les équations différentielles qui ne sont pas toujours présentes dans la leçon.

— 267 : C'est pas forcément le meilleur endroit où mettre ce développement, mais on utilise le lemme de relèvement et le fait que (Y, Y') dessine une courbe C^1 dans le plan des phases pour obtenir des informations très précises. Il est très bien si l'on fait une partie à propos des portraits de phase par exemple.