

Leçon 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Éloan Rapion
Encadré par Titouan Sérandour

Résumé

On étudie ici les équations différentielles linéaires. On commence par une étude générale, en montrant l'existence et l'unicité d'une solution étant donnée une condition initiale, puis en donnant une méthode permettant parfois d'explicitier cette solution. Dans un second temps, on résout le cas où les coefficients sont constants. Enfin, on étudie les équations différentielles dans les distributions, dans un cas restreint.

Introduction : pourquoi résoudre des équations différentielles ?

Le premier intérêt des équations différentielles est leur pouvoir de modélisation. Elles sont en effet omniprésentes en physique. L'exemple historique classique est la deuxième loi de Newton, qui exprime l'accélération d'un corps en fonction du total des forces s'exerçant sur celui-ci. Dans nombre de situations, cette force s'exprime en fonction de la position et de la vitesse de ce corps. Nous avons ainsi affaire à une équation différentielle d'ordre 2. Dans certains cas, cette équation peut être linéaire, par exemple dans le cas d'oscillateur harmonique amorti, que l'on peut mettre en place en accrochant une masse mobile à un degré de liberté à un ressort dont l'autre extrémité est fixée. La position x de cette masse suit alors l'équation suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0.$$

Le troisième terme provient de la force de rappel du ressort, le deuxième des frottements.

Les équations ne sont pas toujours linéaires. Par exemple, l'équation du pendule ne l'est pas :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \sin(\theta) = 0.$$

Mais dans le cas de petites oscillations, le $\sin(\theta)$ peut s'approximer par θ , rendant l'équation linéaire. Cela explique l'intérêt que l'on accorde au cas si particulier des équations linéaires. Celles-ci peuvent approximer des équations

non linéaires, et donner de précieux renseignements sur ces dernières. Ainsi, la stabilité asymptotique d'un équilibre peut se déduire de celle de l'approximation linéaire de l'équation en ce point d'équilibre.

Enfin, précisons que les possibilités de modélisation des équations différentielles ne se limitent pas à la mécanique. Elles sont omniprésentes dans diverses sciences : électronique, électromagnétique, cinétiques chimique, dynamique des populations... Elles trouvent également des applications dans d'autres domaines des mathématiques, par exemple la théorie des groupes de Lie.

1 Cas général

Dans toute la suite, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Si E et F sont des espaces vectoriels normés, on notera $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace vectoriel des fonctions linéaires continues de E vers F , muni de la norme subordonnée. Définissons tout d'abord la notion d'équation différentielle linéaire.

Définition 1. Une équation différentielle linéaire est la donnée d'un \mathbb{K} -espace vectoriel normé E appelé domaine, d'un entier $k \in \mathbb{N}^*$ appelé ordre, d'un intervalle ouvert I , d'une fonction continue $A : I \rightarrow \mathcal{L}_c(E^k, E)$ et d'une fonction continue $b : I \rightarrow E$. Elle est dite homogène si b est la fonction nulle. On notera ces données sous la forme (E, k, I, A, b) , ou dans le cas homogène (E, k, I, A) .

Une solution globale est une fonction dérivable k fois $x : I \rightarrow E$ telle que pour tout $t \in I$:

$$x^{(k)}(t) = A(t)(x^{(k-1)}(t), \dots, x(t)) + b(t). \quad (1)$$

Exemples. — Le domaine \mathbb{R} , l'ordre 2, l'intervalle \mathbb{R} , la fonction $A : t \mapsto ((u, v) \mapsto t^2 u + tv)$, la fonction $b : t \mapsto \sin(t)$ donnent l'équation :

$$x''(t) = t^2 x'(t) + tx(t) + \sin(t).$$

— Le domaine $C^0([0, 1])$, l'ordre 1, l'intervalle \mathbb{R}_+^* , la fonction $A : t \mapsto (f \mapsto (z \mapsto z^t f(z)))$, la fonction $b : t \mapsto (z \mapsto tz)$ donnent l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, z) = z^t f + tz$$

où $f \in C^0(\mathbb{R}_+^* \times [0, 1])$, pour tout $t \in \mathbb{R}_0^*$, $\frac{f(t+h, \bullet) - f(t, \bullet)}{h}$ converge uniformément quand h tend vers 0, et $\frac{\partial f}{\partial t} \in C^0(\mathbb{R}_+^* \times [0, 1])$.

Définition 2. Lorsque le domaine est \mathbb{K} , on dit que l'équation est scalaire. Lorsque le domaine est \mathbb{K}^n pour un $n \in \mathbb{N}$, on peut désigner l'équation différentielle sous le terme de système différentiel.

Remarque 1. On utilise le terme système car dans ce cas, on peut voir l'équation comme un ensemble de n équations scalaires couplées.

Exemple 1. Considérons le domaine \mathbb{R}^3 , l'ordre 2, un intervalle I quelconque, une fonction continue $A : I \rightarrow \mathcal{L}((\mathbb{R}^3)^2, \mathbb{R}^3)$ qui à t associe un endomorphisme que l'on peut écrire sous forme matricielle $(a_{ij}(t))_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 6}$, et une fonction :

$$\begin{aligned} b : I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (b_i(t))_{1 \leq i \leq 3}. \end{aligned}$$

Cela définit le système différentiel linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1'' &= a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3' + a_{14}x_1 + a_{15}x_2 + a_{16}x_3 + b_1 \\ x_2'' &= a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3' + a_{24}x_1 + a_{25}x_2 + a_{26}x_3 + b_2 \\ x_3'' &= a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3' + a_{34}x_1 + a_{35}x_2 + a_{36}x_3 + b_3. \end{cases}$$

Quitte à augmenter la dimension du domaine, on peut toujours réduire une équation différentielle linéaire à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Proposition 1. Soit (E, k, I, A, b) la donnée d'une équation différentielle linéaire. On pose la fonction continue $\tilde{A} : I \rightarrow \mathcal{L}_c(E^k)$ qui à $t \in I$ associe :

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t) : \quad E^k &\rightarrow E^k \\ (x_1, \dots, x_k) &\mapsto (x_2, \dots, x_k, A(t)(x_1, \dots, x_k)), \end{aligned}$$

et la fonction :

$$\begin{aligned} \tilde{b} : I &\rightarrow E^k \\ t &\mapsto (0, \dots, 0, b(t)). \end{aligned}$$

On pose \mathcal{S} l'ensemble des solutions de (E, k, I, A, b) , $\tilde{\mathcal{S}}$ l'ensemble des solutions de $(E^k, 1, I, \tilde{A}, \tilde{b})$. Alors la fonction suivante est une bijection :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{S} &\rightarrow \tilde{\mathcal{S}} \\ x &\mapsto (x, x', \dots, x^{(k-1)}). \end{aligned}$$

Exemple 2. L'équation :

$$x''(t) = t^2 x'(t) + tx(t) + \sin(t).$$

prend la forme du système d'ordre 1 :

$$\begin{cases} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= t^2 y(t) + tx(t) + \sin(t). \end{cases}$$

Ainsi, on peut ne considérer que la résolution des équations d'ordre 1. On notera dans ce cas les données de l'équation (E, I, A, b) au lieu de $(E, 1, I, A, b)$.

Il convient de compléter la notion d'équation différentielle avec celle de condition initiale, de manière à pouvoir définir les problèmes de Cauchy.

Définition 3. Un problème de Cauchy est la donnée de (E, I, A, b, t_0, x_0) où (E, I, A, b) est la donnée d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, et où (t_0, x_0) , qui est appelé condition initiale, est dans $I \times E$.

Une solution globale de ce problème de Cauchy est une solution globale x de l'équation différentielle linéaire associée telle que $x(t_0) = x_0$.

La question qui se pose est celle de l'existence et de l'unicité d'une solution à un problème de Cauchy. On peut d'ors-et-déjà donner un cas on l'on peut même résoudre explicitement un problème de Cauchy (ou plutôt le réduire à un calcul d'intégrale) :

Proposition 2. Soit $(\mathbb{K}, I, a, t_0, x_0)$ un problème de Cauchy homogène scalaire du premier ordre (pour tout $t \in I$, on identifie alors $a(t)$, qui est une homothétie, à son rapport, donc un élément de \mathbb{K}). Il admet alors une unique solution :

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} x_0.$$

Démonstration. On peut vérifier immédiatement que x est bien solution du problème de Cauchy. L'unicité se déduit du théorème de Cauchy-Lipschitz ci-dessous, mais peut aussi se montrer plus élémentairement comme suit. Soit y une solution du problème de Cauchy. On pose alors :

$$\begin{aligned} q : I &\rightarrow \mathbb{K} \\ t &\mapsto e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} y(t). \end{aligned}$$

On peut alors dériver q car c'est un produit de fonctions dérivables : on obtient $q'(t) = 0$, donc q est constante. On évalue en 0 : $q(0) = x_0$. Ainsi $y = x$. \square

Exemple 3. On considère l'équation définie sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par :

$$x'(t) = \tan(t)x(t).$$

Sur I , une primitive de \tan est $t \mapsto -\ln(\cos(t))$. Ainsi avec les conditions initiales (t_0, x_0) , l'unique solution est :

$$t \mapsto \frac{\cos(t_0)}{\cos(t)} x_0.$$

1.1 Existence et unicité

L'existence et l'unicité sont garantis par le théorème suivant, au moins dans le cas où E est un espace de Banach.

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz linéaire). *Un problème de Cauchy dont le domaine est un espace de Banach admet une unique solution globale.*

Démonstration. *Première méthode :* Si l'on admet la théorie générale des équations différentielles, le théorème de Cauchy-Lipschitz local général nous donne l'existence d'une unique solution maximale. Puis on peut utiliser le théorème des bouts avec le lemme de Grönwall pour montrer que cette solution est globale.

Deuxième méthode : On considère un problème de Cauchy (E, I, A, b, t_0, x_0) . Soit J un segment tel que $t_0 \in J \subset I$. On considère l'espace $C^0(J, E)$ munit de la norme $\|\bullet\|_\infty$, qui est de Banach, sur lequel on pose la fonction :

$$\begin{aligned} \Theta : C^0(J, E) &\rightarrow C^0(J, E) \\ x &\mapsto \left(t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x(s) + b(s)) ds \right), \end{aligned}$$

l'intégrale étant bien définie car l'espace est de Banach. On pose $C = \max_{t \in J} \|A(t)\|$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $x, y \in C^0(J, E), t \in J$:

$$\|\Theta^n(y)(t) - \Theta^n(x)(t)\| \leq C^n \frac{|t - t_0|^n}{n!} \|x - y\|_\infty.$$

L'initialisation est immédiate. Supposons l'inégalité vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Soit $x, y \in C^0(J, E), t \in J$ tel que $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned}
\|\Theta^{n+1}(y)(t) - \Theta^{n+1}(x)(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|A(s)\| \|\Theta^n(y)(s) - \Theta^n(x)(s)\| ds \\
&\leq C \int_{t_0}^t \|\Theta^n(y)(s) - \Theta^n(x)(s)\| ds \\
&\leq C \int_{t_0}^t C^n \frac{(t-t_0)^n}{n!} \|x-y\|_\infty ds \\
&\leq C^{n+1} \frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!} \|x-y\|_\infty.
\end{aligned}$$

On montre l'inégalité de la même manière pour $t < t_0$, ce qui termine la récurrence. Ainsi, en posant j la longueur de l'intervalle J , Θ^n est $\frac{(Cj)^n}{n!}$ -lipschitzienne. Comme cette quantité tend vers 0 quand n tend vers ∞ , il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que Θ^n est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne. Par théorème du point fixe itéré, Θ admet un unique point fixe. On le note x_J .

On pose alors :

$$\begin{aligned}
x : I &\rightarrow E \\
t &\mapsto x_J(t) \text{ pour un segment } J \text{ tel que } t_0, t \in \overset{\circ}{J} \text{ et } J \subset I.
\end{aligned}$$

Cette application est bien définie, car pour $t \in I$, il existe un segment J tel que $t_0, t \in \overset{\circ}{J}$ et $J \subset I$, et pour J, J' deux tels segments, les restrictions de x_J et $x_{J'}$ à $J \cap J'$ sont $x_{J \cap J'}$ (car ce sont des points fixes de Θ défini par rapport à $J \cap J'$), donc elles coïncident en t . De plus, x est solution du problème de Cauchy, car par théorème fondamental de l'analyse, x_J est solution du problème de Cauchy sur l'intérieur de J .

Enfin la solution globale est unique. En effet, si y est solution du problème de Cauchy, $t \in I$ et J est un segment vérifiant les mêmes propriétés que précédemment, le théorème fondamental de l'analyse montre que la restriction de y à J est un point fixe de Θ . Par unicité, elle est égale à x_J , donc $y(t) = x(t)$. □

On peut ainsi décrire la structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire.

Proposition 3. *Soit E un espace de Banach, (E, k, I, A, b) la donnée d'une équation différentielle linéaire. Soit \mathcal{S} l'ensemble des solutions de (E, k, I, A, b) , \mathcal{S}_0 l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée (E, k, I, A) .*

Alors \mathcal{S} est un espace affine de direction \mathcal{S}_0 , et pour tout $t_0 \in I$ la fonction suivante est un isomorphisme d'espaces affines :

$$\begin{aligned}
ev_{t_0} : \mathcal{S} &\rightarrow E^k \\
x &\mapsto (x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(k-1)}(t_0)).
\end{aligned}$$

C'est un isomorphisme d'espaces vectoriels si l'équation est homogène.

Remarques. — *En particulier, la dimension de l'espace des solutions est le produit de celle du domaine et de l'ordre (en particulier elle est infinie si le domaine est de dimension infinie).*

— La fonction Ψ de la proposition 1 est un isomorphisme d'espaces affines, et même d'espaces vectoriels si l'équation est homogène.

Concrètement, le théorème précédent nous dit que l'ensemble des fonctions x vérifiant $x^{(k)}(t) = A(t)(x(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) + b(t)$ pour tout t dans I est l'ensemble des fonctions de la forme $x_h + y$, avec y une des solutions et $y : I \rightarrow E$ vérifiant $y^{(k)}(t) = A(t)(y(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$ pour tout $t \in I$. Ainsi, résoudre une équation différentielle linéaire se réduit à en trouver une solution particulière, et à résoudre une équation différentielle linéaire homogène.

Exemple 4. On considère l'équation définie sur l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par :

$$x'(t) = \tan(t)x(t) + 1.$$

Avec l'exemple 3 et la solution particulière \tan , on obtient comme espace des solutions $\mathbb{K} \frac{1}{\cos} + \tan$.

Application 1. On cherche à calculer la transformée de Fourier de la gaussienne g_α définie par :

$$g_\alpha : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-\alpha t^2} \end{array}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Remarquons que g_α vérifie l'équation différentielle suivante :

$$g'_\alpha(t) = -2\alpha t g_\alpha(t).$$

On applique la transformation de Fourier à chaque membre de l'égalité, et on utilise ses propriétés vis-à-vis de la dérivation pour obtenir une équation différentielle vérifiée par $\tilde{g}_\alpha : i \xi \tilde{g}_\alpha(\xi) = -2\alpha i \tilde{g}_\alpha'(\xi)$, soit :

$$\tilde{g}_\alpha'(\xi) = \frac{-\xi}{2\alpha} \tilde{g}_\alpha(\xi).$$

Cette équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 est aussi vérifiée par $g_{\frac{1}{4\alpha}}$. D'après la proposition, les solutions forment un espace vectoriel de dimension 1, donc pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$, $\tilde{g}_\alpha(\xi) = \lambda g_{\frac{1}{4\alpha}}(\xi)$ pour tout ξ . On évalue en $\xi = 0$: à gauche, c'est une intégrale classique qui vaut $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, à droite $\tilde{g}_\alpha(\xi)$. Ainsi $\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, et $\tilde{g}_\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} g_{\frac{1}{4\alpha}}$.

1.2 Résolution explicite

Si l'existence et l'unicité d'une solution sont théoriquement assurées, nous souhaiterions à présent pouvoir la déterminer explicitement. On considère que l'on sait résoudre l'équation différentielle linéaire homogène associée. Il reste alors à déterminer une solution particulière.

Le théorème 1 permet de définir le flot.

Définition 4. Le flot d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur un espace de Banach est la fonction

$$\Phi : \begin{array}{l} I^2 \times E \rightarrow E \\ (t_0, t, x_0) \mapsto \Phi_{t_0, t}(x_0) \end{array}$$

telle que pour tout $(t_0, x_0) \in I \times E$, la fonction $t \mapsto \Phi_{t_0, t}(x_0)$ est l'unique solution au problème de Cauchy de donnée initiale (t_0, x_0) .

Exemple 5. Dans le cadre de la proposition 2, le flot est $\Phi_{t_0, t}(x_0) = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} x_0$.

On déduit de la proposition 3 que pour t_0 et t fixés, la fonction $\Phi_{t_0, t}$ est un automorphisme d'espace affine de E . Dans le cas homogène, on a même $\Phi_{t_0, t} \in \text{GL}(E)$.

Dans le cas homogène où E est de dimension finie n , et où l'on peut donc l'identifier à \mathbb{K}^n en fixant une base, le flot prend la forme plus concrète d'une application continue de I^2 vers $\text{GL}_n(\mathbb{K})$.

Définition 5. On considère une équation homogène (E, I, A) . Un système fondamental de solutions est une base de l'espace des solutions. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $E = \mathbb{K}^n$, la matrice fondamentale associée est la fonction qui à $t \in I$ associe la matrice dont les colonnes sont les solutions du système fondamental évaluées en t . Le wronskien du système est la composée de cette fonction par \det .

Proposition 4. Soit (x_1, \dots, x_n) une famille de solutions de (\mathbb{K}^n, I, F) homogène. Soit $t \in I$. Alors (x_1, \dots, x_n) est un système fondamental de solutions si et seulement si $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ est une base de \mathbb{K}^n . En particulier un wronskien ne s'annule jamais.

Démonstration. Cela résulte de la proposition 3, et du fait que l'image d'une base par un isomorphisme est une base. \square

Remarques. — Le flot est directement lié aux matrices fondamentales : si S est l'une d'entre elles, on a pour tout $t_0, t \in I$, $\Phi_{t_0, t} = S(t)S(t_0)^{-1}$.
— Si $t \mapsto S(t)$ est une matrice fondamentale, l'ensemble des matrices fondamentales est l'ensemble des $t \mapsto S(t)P$ pour toutes les $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. En particulier, pour tout $t_0 \in I$, il existe une unique matrice fondamentale valant l'identité en t_0 (en choisissant $P = S(t_0)^{-1}$).

Proposition 5. Une fonction dérivable $S : I \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{K})$ est une matrice fondamentale si et seulement si elle vérifie l'équation différentielle suivante :

$$S'(t) = A(t) \cdot S(t)$$

Un wronskien w vérifie l'équation différentielle suivante :

$$w'(t) = \text{tr}(A(t))w(t)$$

et la formule suivante :

$$w(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds}.$$

Démonstration. La première formule résulte de la définition d'une matrice fondamentale. La deuxième résulte du théorème des fonctions composées et de la différentielle du déterminant ($d \det(A) \cdot H = \text{tr}({}^t \text{Com}(A)H)$) :

$$\begin{aligned} w'(t) &= d \det(S(t)) \cdot S'(t) \\ &= \text{tr}({}^t \text{Com}(S(t))A(t)S(t)) \\ &= \det(S(t)) \text{tr}(S(t)^{-1}A(t)S(t)) \\ &= \text{tr}(A(t))w(t). \end{aligned}$$

On en déduit la dernière formule à l'aide de la proposition 2. □

Exemple 6. *Considérons le cas d'une équation différentielle linéaire scalaire. On a vu à la proposition 1 que l'on pouvait lui associer une équation différentielle linéaire du premier ordre, dont le domaine a pour dimension l'ordre de l'équation scalaire. Si cette dernière s'écrit :*

$$x^{(k)}(t) = a_0(t)x(t) + a_1(t)x'(t) + \cdots + a_{k-1}(t)x^{(k-1)}(t), \quad (2)$$

l'équation d'ordre 1 associée s'écrit :

$$X'(t) = A(t)X(t) \quad (3)$$

avec $A(t)$ la matrice compagnon :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 0 & 1 \\ a_0(t) & \cdots & \cdots & a_{k-1}(t) \end{pmatrix}$$

On entend alors par système fondamental de solution une base de l'espace des solutions de l'équation 2, et par matrice fondamentale ou wronskien de l'équation 2 ceux de l'équation 3. Ainsi, si (x_1, \dots, x_k) est un système fondamental de solutions, la matrice fondamentale associée est :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_k(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(k-1)}(t) & \cdots & x_k^{(k-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

La forme particulière de la matrice $A(t)$ dans ce cas simplifie les équations sur le wronskien :

$$w'(t) = a_{k-1}(t)w(t)$$

et :

$$w(t) = w(t_0)e^{\int_{t_0}^t a_{k-1}(s) ds}.$$

Application 2 (Équation de Hill-Mathieu). Soit $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue, paire, π -périodique. Considérons l'équation :

$$x''(t) + q(t)x(t) = 0 \quad (4)$$

pour $t \in \mathbb{R}$. On considère la solution x_1 telle que $x_1(0) = 1$ et $x_1'(0) = 0$. Alors :

- si $|x_1(\pi)| < 1$, toutes les solutions (à valeurs complexes) sont bornées ;
- si $|x_1(\pi)| = 1$, il existe une solution (à valeurs réelles) non nulle bornée ;
- si $|x_1(\pi)| > 1$, la seule solution (à valeurs complexes) bornée est la solution nulle.

Démonstration. On pose l'endomorphisme de translation :

$$\begin{aligned} u : C^2(\mathbb{R}) &\rightarrow C^2(\mathbb{R}) \\ x &\mapsto x(\bullet + \pi). \end{aligned}$$

Montrons que l'espace \mathcal{S} des solutions de l'équation 4 est stable par u . Soit x une solution, $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u(x)''(t) &= x''(t + \pi) \\ &= -q(t + \pi)x(t + \pi) \\ &= -q(t)u(x)(t) \end{aligned}$$

par périodicité de q et car u est solution. Ainsi $u(x) \in \mathcal{S}$.

Soit S la matrice fondamentale telle que $S(0)$ est l'identité. Alors sa première ligne (x_1, x_2) est un système fondamental de solutions tel que $x_1(0) = x_2'(0) = 1$ et $x_1'(0) = x_2(0) = 0$. On pose alors :

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

la matrice de l'endomorphisme induit par u sur \mathcal{S} dans cette base. Remarquons que $U = S(\pi)$. En effet, par définition, $x_1(\bullet + \pi) = ax_1 + cx_2$. En évaluant en 0, on a alors $x_1(\pi) = a$. En dérivant au préalable, on obtient $x_1'(\pi) = c$. Donc la première colonne de U est celle de $S(\pi)$, et on procède de même pour la deuxième.

Ainsi, le déterminant de U est le wronskien w en π . Or, d'après l'exemple 6, w est ici constant (le coefficient correspondant à a_{n-1} étant nul). Donc $\det(U) = w(\pi) = w(0) = \det(S(0)) = \det(I_2) = 1$.

Montrons que $a = d$. Calculons U^{-1} de deux manières différentes. Une formule classique donne (le déterminant de U étant 1) :

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

D'autre part, on peut montrer comme précédemment que :

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} x_1(-\pi) & x_2(-\pi) \\ x_1'(-\pi) & x_2'(-\pi) \end{pmatrix},$$

U^{-1} étant la matrice de la translation de $-\pi$. Or la parité de q implique que si x est solution, alors $x(-\bullet)$ aussi. En constatant la valeur en 0 ainsi que celle de leur dérivée, et en utilisant le fait que $x \mapsto (x(0), x'(0))$ est un isomorphisme de \mathcal{S} vers \mathbb{R}^2 , on constate alors que x_1 est paire et x_2 impaire. Ainsi :

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}.$$

En comparant avec la première formule, on a $a = d$.

Ainsi, le polynôme caractéristique de U est $X^2 - 2aX + 1$ et a pour discriminant $4(a^2 - 1)$. On peut alors faire la disjonction de cas.

- Si $|a| < 1$, alors U a deux valeurs propres complexes conjuguées distinctes ρ et $\bar{\rho}$. De plus d'après les relations coefficients-racines, leur produit est 1. Donc ρ est de module 1. On a alors une base de vecteurs propres y_1 et y_2 : ce sont des solutions complexes qui engendrent l'espace des solutions à valeurs complexes (qui inclue l'espace des solutions à valeurs réelles). Il suffit que ces deux solutions soient bornées pour que toutes les autres le soient. Or :

$$y_1(\bullet + \pi) = \rho y_1$$

donc :

$$|y_1(\bullet + \pi)| = |y_1|,$$

c'est-à-dire $|y_1|$ est périodique. Comme elle est continue, elle est bornée, donc y_1 également. On procède de même pour y_2 .

- Si $|a| = 1$, alors U a une valeur propre réelle de multiplicité 2. Son carré est 1, elle est donc 1 ou -1 . Elle admet un vecteur propre (une solution non nulle à valeurs réelles), qui est bornée comme au point précédent.
- Si $|a| > 1$, alors u a deux valeurs propres réelles distinctes $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et λ^{-1} , quitte à échanger on suppose $|\lambda| > 1$. Soit (y_1, y_2) une base de vecteurs propres, soit $x = \alpha y_1 + \beta y_2$ une solution. Si $\alpha \neq 0$, soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $y_1(t) \neq 0$. Alors quand $n \in \mathbb{N}$ tend vers $+\infty$, $x(t + n\pi)$ est équivalent à $\alpha \lambda^n y_1(t)$ donc x n'est pas bornée. Si $\beta \neq 0$, soit t tel que $y_2(t) \neq 0$. Alors quand $n \in \mathbb{N}$ tend vers $+\infty$, $x(t - n\pi)$ est équivalent à $\beta \lambda^n y_2(t)$ donc x n'est pas bornée. Ainsi, la seule solution bornée est la fonction nulle.

□

Connaissant une matrice fondamentale, on peut réduire le problème de la recherche d'une solution particulière à un calcul d'intégrale :

Théorème 2 (Lagrange). *Considérons le problème de Cauchy $(\mathbb{K}^n, I, A, b, t_0, x_0)$. Soit S une matrice fondamentale de l'équation homogène associée (\mathbb{K}^n, I, A) . L'unique solution x est :*

$$x(t) = S(t) \left(S(t_0)^{-1} x_0 + \int_{t_0}^t S(s)^{-1} b(s) ds \right)$$

Démonstration. On dérive la solution x avec la formule de la dérivée d'un produit. On obtient deux termes.

- Le premier est :

$$A(t) \cdot S(t) \left(S(t_0)^{-1} x_0 + \int_{t_0}^t S(s)^{-1} b(s) ds \right) = A(t)(x(t)),$$

ce que l'on obtient avec la proposition 5.

- Le second est :

$$S(t)S(t)^{-1}b(t) = b(t),$$

car c'est la dérivée d'une intégrale.

Ainsi x est bien solution de l'équation différentielle. Enfin elle vérifie la condition initiale :

$$x(t_0) = S(t_0)S(t_0)^{-1}x_0 = x_0.$$

□

Exemple 7. Dans le cas scalaire $(\mathbb{K}, I, a, b, t_0, x_0)$, l'unique solution est $x(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} x_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(\sigma) d\sigma} b(s) ds$. Ainsi, dans l'exemple 4, l'unique solution est $\frac{\cos(t_0)}{\cos(t)} x_0 + \int_{t_0}^t \frac{\cos(s)}{\cos(t)} ds$, soit $\frac{\cos(t_0)}{\cos(t)} x_0 + \tan(t) - \frac{\sin(t_0)}{\cos(t)}$, donc $\frac{\cos(t_0)x_0 - \sin(t_0)}{\cot(t)} + \tan(t)$.

2 Systèmes linéaires à coefficients constants

On s'intéresse dans cette section à un cas particulier primordial : celui où A est constante, cas dit à *coefficients constants*. On peut alors expliciter une matrice fondamentale de l'équation. On peut considérer A comme une fonction linéaire continue de E dans E . Dans le cas homogène $b = 0$, I ne joue aucun rôle : on écrit donc les données de l'équation (E, A) et on considère sa résolution pour $I = \mathbb{R}$.

Exemples. — On pose le système :

$$\begin{cases} x' &= -25x + 36y \\ y' &= -18x + 26y. \end{cases}$$

— On pose le système :

$$\begin{cases} x' &= -7x + 3y + z \\ y' &= 84x - 25y - 8z \\ z' &= -333x + 108y + 35z. \end{cases}$$

Proposition 6. On considère (\mathbb{K}^n, A) homogène (A est donc dans $\text{GL}_n(\mathbb{K})$). Alors $t \mapsto e^{tA}$ est une matrice fondamentale.

Démonstration. Il suffit d'écrire la série définissant e^{tA} , de dériver chacun des termes $t^n \frac{A^n}{n!}$ en $t^{n-1} \frac{A^n}{(n-1)!}$ puis de factoriser par A . On constate ainsi que l'équation de la proposition 5 est vérifiée. □

Corollaire 1. On considère le problème de Cauchy $(\mathbb{K}^n, I, A, b, t_0, x_0)$. Alors l'unique solution x est :

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} b(s) ds$$

Le problème se réduit alors au calcul d'une exponentielle de matrice. On peut facilement la calculer si l'on peut mettre A sous forme diagonale, ou sous forme de Jordan. On commence par le premier cas :

Proposition 7. On considère (E, A) homogène avec E de dimension finie n et A diagonalisable, de valeurs propres avec multiplicité $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^n$. Alors il existe une base (v_i) de E tel qu'en posant pour tout $1 \leq i \leq n$:

$$\begin{aligned} x_i : \mathbb{R} &\rightarrow E \\ t &\mapsto e^{t\lambda_i} v_i \end{aligned}$$

les (x_i) forment un système fondamental de solutions.

Exemple 8. On considère le premier système, et sa matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -25 & 36 \\ -18 & 26 \end{pmatrix}.$$

Posons alors la matrice inversible :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

d'inverse :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a alors $A = PDP^{-1}$ avec D la matrice diagonale de coefficients diagonaux -1 et 2 . Les colonnes de P donnent alors une base de vecteurs propres de A . On en déduit le système fondamental de solutions $e^{-t}(3, 2)$ et $e^{2t}(4, 3)$.

La forme de Jordan est adaptée pour le calcul d'exponentielle de matrice :

Lemme 1. Soit $A \in \text{GL}(E)$ avec E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie n . Soit $m \in \mathbb{N}$ le nombre de valeurs propres distinctes, $(\lambda_i) \in \mathbb{C}^m$ leur liste sans multiplicité, $(n_i) \in (\mathbb{N}^*)^m$ la liste de leurs multiplicités. Il existe une base de E dans laquelle, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice de e^{tA} est :

$$\begin{pmatrix} B_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & B_m \end{pmatrix}$$

avec pour tout $1 \leq i \leq m$:

$$B_i = e^{t\lambda_i} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ (0) & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration. L'exponentielle d'un bloc de Jordan, et de son produit par t , se calcule en l'écrivant comme la somme d'une matrice scalaire et d'une matrice nilpotente triangulaire supérieure, les deux commutant. Ainsi l'exponentielle du bloc est le produit des exponentielles de ces deux parties. Le calcul de l'exponentielle d'une matrice scalaire revient simplement à faire l'exponentielle d'un nombre complexe. L'exponentielle d'une matrice nilpotente est un polynôme en cette matrice car la série la définissant est nulle à partir d'un certain rang. On obtient ainsi les deux facteurs de B_i . \square

Proposition 8. On considère (E, A) homogène avec E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie n . Soit $m \in \mathbb{N}$ le nombre de valeurs propres distinctes, $(\lambda_i) \in \mathbb{C}^m$ leur liste sans multiplicité, $(n_i) \in (\mathbb{N}^*)^m$ la liste de leurs multiplicités. Alors il existe une base $(v_i^j)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i}$ de E tel qu'en posant pour tout $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n_i$:

$$\begin{aligned} x_i^j : \mathbb{R} &\rightarrow E \\ t &\mapsto e^{t\lambda_i} \left(v_i^j + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{t^k}{k!} v_i^{j-k} \right) \end{aligned}$$

les (x_i^j) forment un système fondamental de solutions.

Exemple 9. On reprend le deuxième exemple. La matrice A est :

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 1 \\ 84 & 25 & 8 \\ -333 & 108 & 35 \end{pmatrix}.$$

On pose alors la matrice inversible :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \\ -3 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

d'inverse :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ -9 & 3 & 1 \\ 40 & -13 & -4 \end{pmatrix}.$$

On pose également la matrice de Jordan :

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alors $A = PJP^{-1}$. Les colonnes de P permettent donc de trouver le système fondamental de solutions $e^{2t}(1, 4, -3)$, $e^{2t}((2, 4, 7) + t(1, 4, -3))$ et $e^{-t}(0, -1, 3)$.

2.1 Équations différentielles linéaires scalaires à coefficients constants

On cherche à résoudre une équation scalaire. On considère uniquement le cas homogène. Alors, il existe un polynôme unitaire $P \in \mathbb{K}[X]$, appelé *polynôme caractéristique* de l'équation, de degré l'ordre k de l'équation tel que celle-ci s'écrive $P\left(\frac{d}{dt}\right)(x) = 0$.

Remarquons pour commencer qu'une solution est nécessairement de classe C^∞ : en effet, x est k fois dérivable. Supposons qu'elle est dérivable l fois pour l un entier supérieur à k . Alors, pour $0 \leq m < k$, $x^{(m)}$ est dérivable $l - m$ fois, donc $l - k + 1$ fois. Or, par hypothèse, $x^{(k)}$ est combinaison linéaire de ces fonctions, donc est dérivable $l - k + 1$ fois, donc x est dérivable $l + 1$ fois. Par récurrence, x est donc C^∞ .

Or $\frac{d}{dt} \in \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}))$, et $P\left(\frac{d}{dt}\right) \in \mathbb{K}\left[\frac{d}{dt}\right]$. Le problème revient donc à identifier le noyau d'un opérateur linéaire de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. Cela est facile dans le cas complexe.

Proposition 9. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ les racines de P , (n_i) leurs multiplicités respectives. Alors une base de l'espace des solutions de $P\left(\frac{d}{dt}\right)(x) = 0$ est formée par les $t \mapsto t^k e^{\lambda_i t}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $0 \leq k < n_i$.

Démonstration. Le lemme de décomposition des noyaux dit que l'espace des solutions est somme directe des noyaux des $\left(\frac{d}{dt} - \lambda_i\right)^{n_i}$. Définissons un nouvel opérateur linéaire :

$$\begin{aligned} p_i : C^\infty &\rightarrow C^\infty \\ x &\mapsto (t \mapsto e^{\lambda_i t} x(t)). \end{aligned}$$

Alors $\frac{d}{dt} - \lambda_i = p_i \circ \frac{d}{dt} \circ p_i^{-1}$, donc $\left(\frac{d}{dt} - \lambda_i\right)^{n_i} = p_i \circ \frac{d}{dt}^{n_i} \circ p_i^{-1}$, d'où $\ker\left(\frac{d}{dt} - \lambda_i\right)^{n_i} = p_i\left(\ker \frac{d}{dt}^{n_i}\right) = p_i(\mathbb{C}_{n_i-1}[X])$. \square

On résout le cas réel en regardant les parties réelles et imaginaires des solutions du cas complexe.

Proposition 10. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ les racines réelles de P , (n_i) leur multiplicité respective, $(\alpha_j + i\beta)_{1 \leq j \leq m}$ les racines de partie imaginaire strictement positive, $(m_j)_{1 \leq j \leq m}$ leur multiplicité respective. Alors une base de l'espace des solutions de $P\left(\frac{d}{dt}\right)(x) = 0$ est formée par les $t \mapsto t^k e^{\lambda_i t}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $0 \leq k < n_i$, les $t \mapsto t^k e^{\alpha_j t} \cos(\beta_j t)$ et les $t \mapsto t^k e^{\alpha_j t} \sin(\beta_j t)$ pour $1 \leq j \leq m$ et $0 \leq k < m_j$.

Démonstration. L'ensemble des solutions à valeurs réelles est un sous- \mathbb{R} -espace vectoriel de l'espace des solutions à valeurs complexes. Par linéarité, si x est une solution à valeurs complexes, alors $\Re \circ x$ et $\Im \circ x$ sont aussi solutions. Avec le système fondamental de solutions A donné par la proposition 9, on en déduit que les fonctions de l'énoncé sont bien solutions, on note B leur ensemble. De plus, pour $t \in \mathbb{R}$, $e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$, donc le \mathbb{C} -espace vectoriel engendré par ces solutions contient A , donc est l'espace des solutions complexes. Comme le cardinal de B est la dimension de cette espace, B en est une \mathbb{C} -base. C'est donc une famille \mathbb{C} -libre. En particulier elle est \mathbb{R} -libre. Ainsi c'est un système fondamental de solutions. \square

Exemple 10. On considère l'équation de l'oscillateur harmonique amorti de l'introduction :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

avec $\alpha, \omega \in \mathbb{R}_+^*$. Le polynôme caractéristique est alors $P = X^2 + \alpha X + \omega^2$. On pose alors $Q = \frac{\omega}{\alpha}$, grandeur appelée facteur de qualité. Le discriminant de P est $\Delta = \left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)\omega^2$. On distingue alors plusieurs cas.

- Si $Q < \frac{1}{2}$, on parle de régime aperiodique : P a deux racines réelles $r_\pm = \frac{1}{2} \left(-\frac{\omega}{Q} \pm \sqrt{\Delta}\right)$ distinctes. Comme P est strictement positif sur \mathbb{R}_+ , r_- et r_+ sont strictement négatives. Les solutions sont alors les fonctions de la forme $(t \mapsto a e^{r_- t} + b e^{r_+ t})$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Physiquement, la masse est attirée vers le point 0 par le ressort, peut y passer une fois (ou pas) et s'en éloigner, puis se redirige vers lui, mais les frottements l'empêchent de l'atteindre. Elle y converge alors quand t tend vers $+\infty$. Voir la figure 1.

- Si $Q = \frac{1}{2}$, on parle de régime critique. Dans ce cas, P a une racine double réelle strictement négative $r = -\frac{\omega}{2Q}$. Les solutions sont de la forme $(t \mapsto (a + bt)e^{rt})$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, le comportement de la masse proche du cas précédent. Voir la figure 2.
- Si $Q > \frac{1}{2}$, on parle de régime pseudo-périodique. Alors $\Delta < 0$, donc P a deux racines complexes conjuguées distinctes, de partie réelle $s = -\frac{\omega}{2Q}$, de partie imaginaire $\pm k$ avec $k = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$. Ainsi les solutions sont les fonctions de la forme $(t \mapsto e^{st} (a \sin(kt) + b \cos(kt)))$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Physiquement, la masse oscille de part et d'autre du point 0 (deuxième facteur), tout en étant ralentie par les frottements et donc en convergeant vers ce point (premier facteur). Voir la figure 3.

2.2 Stabilité

Dans le cas homogène, 0 est un point d'équilibre (autrement dit la fonction nulle est solution). Dans le cas où les coefficients sont constants, on peut déterminer sa stabilité.

Définition 6. On considère une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants. On dit que 0 est un équilibre stable si pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour toute solution x telle que $\|x(0)\| \leq \alpha$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on ait $\|x(t)\| \leq \epsilon$.

On dit que 0 est un équilibre asymptotiquement stable si c'est un équilibre stable et toute solution tend vers 0 en $+\infty$.

Proposition 11. On considère l'équation (E, A) avec E de dimension finie. Alors :

- 0 est un équilibre stable si et seulement si les valeurs propres du spectre complexe de A sont de partie réelle strictement négative ;
- 0 est un équilibre asymptotiquement stable si et seulement si les valeurs propres du spectre complexe de A sont de partie réelle négative et celle qui sont imaginaires pures sont semi-simples.

Démonstration (esquisse). La preuve dans le cas complexe repose sur le passage en forme de Jordan : on utilise la proposition 8. La forme de Jordan permet de traduire les propriétés sur le spectre de A en propriétés du comportement asymptotique de la norme opérateur de $\exp(tA)$. Ceci permet d'en déduire le cas réel. \square

Exemple 11. Dans les deux systèmes donnés en exemple, 0 n'est pas un équilibre stable, car leur matrice a 2 pour valeur propre.

3 Équation différentielle linéaire à coefficients constants dans les distributions

On considère l'équation $P\left(\frac{d}{dt}\right)(X) = B$ (avec P un polynôme unitaire), que l'on cherche à résoudre cette fois-ci pour X dans l'espace des distributions sur \mathbb{R} , et avec B une distribution. On considère ainsi $\frac{d}{dt}$ comme un opérateur linéaire de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Le cas homogène est le même que précédemment.

Proposition 12. *Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ unitaire, le noyau de $P\left(\frac{d}{dt}\right)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est dans $C^\infty(\mathbb{R})$.*

Démonstration. On refait la preuve de la proposition 9, en remarquant que $\ker \frac{d}{dt} = \mathbb{C}_{n-1}[X]$ reste vrai car $\ker \frac{d}{dt}$ est l'ensemble des fonction constantes, même dans les distributions. \square

On s'intéresse à présent à la recherche d'une solution particulière.

Proposition 13. *Soit $D \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors $P\left(\frac{d}{dt}\right)(D) = P\left(\frac{d}{dt}\right)(\delta) * D$, avec δ le Dirac en 0 et $*$ le produit de convolution.*

Le problème est à présent la recherche d'une solution élémentaire de l'opérateur différentiel, c'est-à-dire une distribution E telle que $P\left(\frac{d}{dt}\right)(E) = \delta$, afin que, sous réserve d'existence de la convolution, $P\left(\frac{d}{dt}\right)(E * B) = P\left(\frac{d}{dt}\right)(\delta) * (E * B) = (P\left(\frac{d}{dt}\right)(\delta) * E) * B = \delta * B = B$: ainsi, $E * B$ est une solution particulière.

On se place dans le cas complexe. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$L_{\lambda,n} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On pose $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ l'ensemble des racines et $(n_i)_{1 \leq i \leq n}$ les multiplicités respectives. Le théorème de décomposition en éléments simples nous donne une unique famille de complexes $(\alpha_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n_i}$ tels que :

$$\frac{1}{P} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ij}}{(X - \lambda_i)^j}.$$

On pose alors :

$$\left(P \left(\frac{d}{dt} \right) (\delta) \right)^{-1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} L_{\lambda_i, j}.$$

Proposition 14. *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On a $P\left(\frac{d}{dt}\right) \left(\left(P\left(\frac{d}{dt}\right) (\delta) \right)^{-1} \right) = \delta$.*

Démonstration. Commençons par constater que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)^n (L_{\lambda,n}) = \delta$. En effet, la formule des sauts montre d'une part que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\left(\frac{d}{dt} - \lambda\right) (L_{\lambda,(n+1)}) = L_{\lambda,n}$, d'autre part que $\left(\frac{d}{dt} - \lambda\right) (L_{\lambda,1}) = \delta$.

Soit à présent $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire, $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ l'ensemble de ses racines et $(n_i)_{1 \leq i \leq n}$ les multiplicités respectives, on définit les α_{ij} comme précédemment.

Remarquons alors que pour $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n_i$, $\frac{P}{(X - \lambda_i)^j}$ est un polynôme,

et que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} \frac{P}{(X - \lambda_i)^j} = 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{d}{dt}\right)\left(\left(P\left(\frac{d}{dt}\right)(\delta)\right)^{-1}\right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} P\left(\frac{d}{dt}\right)(L_{\lambda_i,j}) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} \frac{P}{(X-\lambda_i)^j} \left(\frac{d}{dt}\right) \left(\left(\frac{d}{dt} - \lambda_i\right)^j (L_{\lambda_i,j})\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} \frac{P}{(X-\lambda_i)^j} \left(\frac{d}{dt}\right)(\delta) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} \frac{P}{(X-\lambda_i)^j}\right) \left(\frac{d}{dt}\right)(\delta) \\
&= \delta.
\end{aligned}$$

□

On a ainsi une méthode pour calculer une solution particulière de $P\left(\frac{d}{dt}\right)(X) = B$, à condition de pouvoir convoler notre solution fondamentale et B . En théorie, cela est possible si B est à support minoré (car les solutions élémentaires trouvées sont à support minoré, et on peut toujours convoler deux telles distributions). En pratique, il faut bien sûr être capable de calculer ce produit de convolution.

Exemples. — Dans le cas où $P = X - \lambda$ et où B est une fonction continue de support minoré par un $t_0 \in \mathbb{R}$, on obtient comme solution particulière $t \mapsto \int_{t_0}^t e^{\lambda(t-s)} B(s) ds$, ce que nous donnait déjà la formule de Lagrange pour $x_0 = 0$.

— Considérons le cas $P = (X - \lambda)^n$ avec $n \geq 2$ et $B = \delta'$. Alors une solution particulière est $L_{\lambda,n} * \delta'$, donc la dérivée de $L_{\lambda,n}$, qui est :

$$s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\
t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ ((n-1) + \lambda t) \frac{t^{n-2}}{(n-1)!} e^{\lambda t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Annexes

Bibliographie

- [Arn74] Vladimir ARNOLD. *Equations différentielles ordinaires*. Mir, 1974.
- [Ber17] Florent BERTHELIN. *Équations différentielles*. Cassini., 2017.
- [Dem16] Jean-Pierre DEMAILLY. *Analyse numérique et équations différentielles-4ème Ed*. EDP sciences, 2016.
- [QZ20] Hervé QUEFFÉLEC et Claude ZUILY. *Analyse pour l'agrégation-Agrégation/Master Mathématiques*. Dunod, 2020.
- [Yge01] Alain YGER. *Analyse complexe et distributions*. Ellipses, 2001.

Les courbes ont été tracées avec l'outil en ligne : <https://www.mathe-fa.de/fr>.

Figures

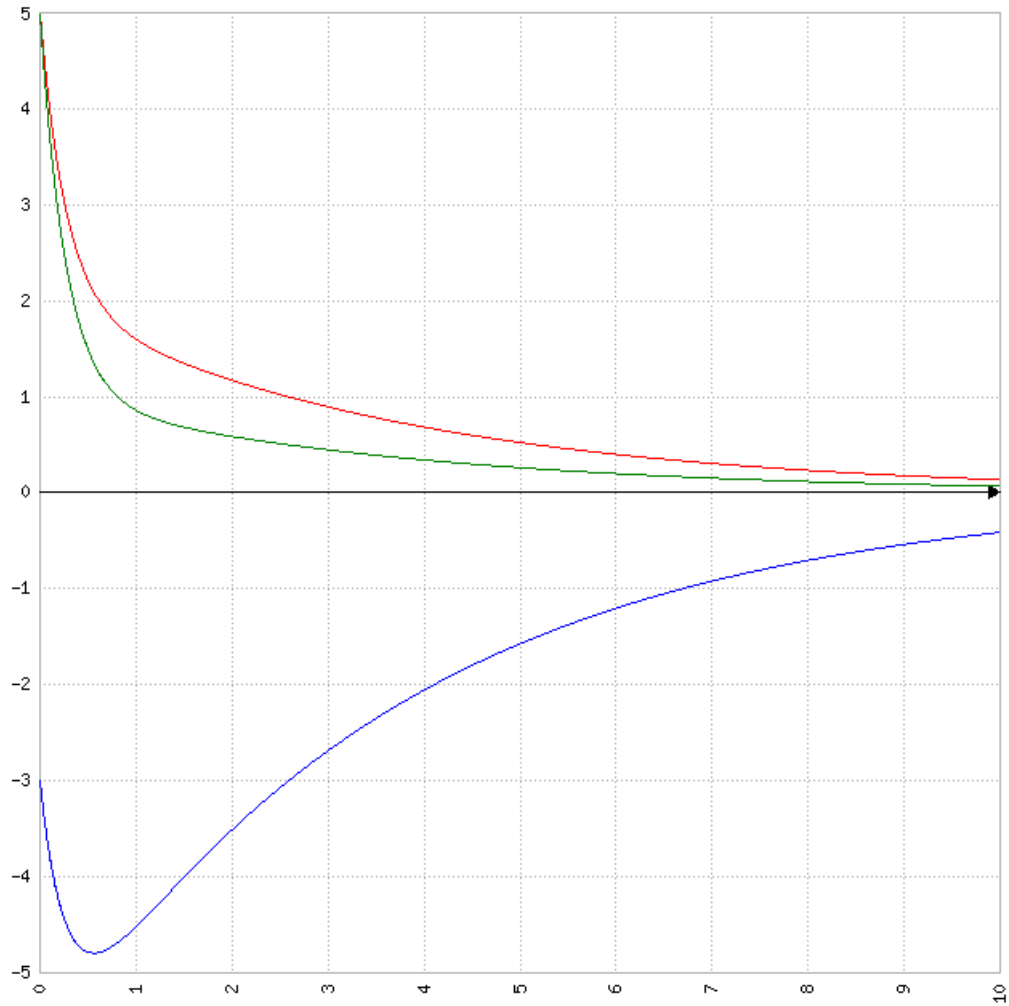


FIGURE 1 – Exemples de solutions en régime apériodique pour $Q = \frac{1}{4}, \omega = 1, r_{\pm} = -2 \pm \sqrt{3}$
Courbe rouge : $a = 3, b = 2$
Courbe verte : $a = 4, b = 1$
Courbe bleue : $a = 3, b = -6$

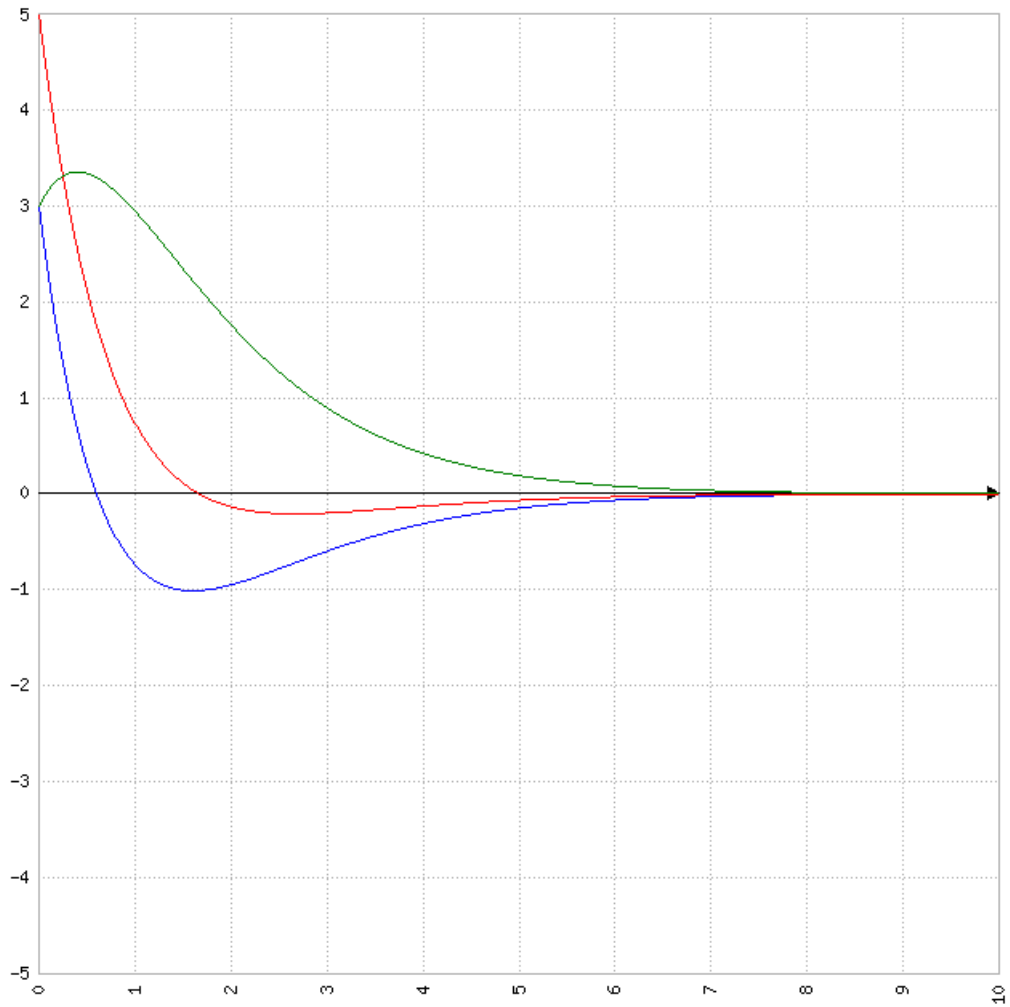


FIGURE 2 – Exemples de solutions en régime critique pour $Q = \frac{1}{2}, \omega = 1, r = -1$
 Courbe rouge : $a = 5, b = -3$
 Courbe verte : $a = 3, b = 5$
 Courbe bleue : $a = 3, b = -5$

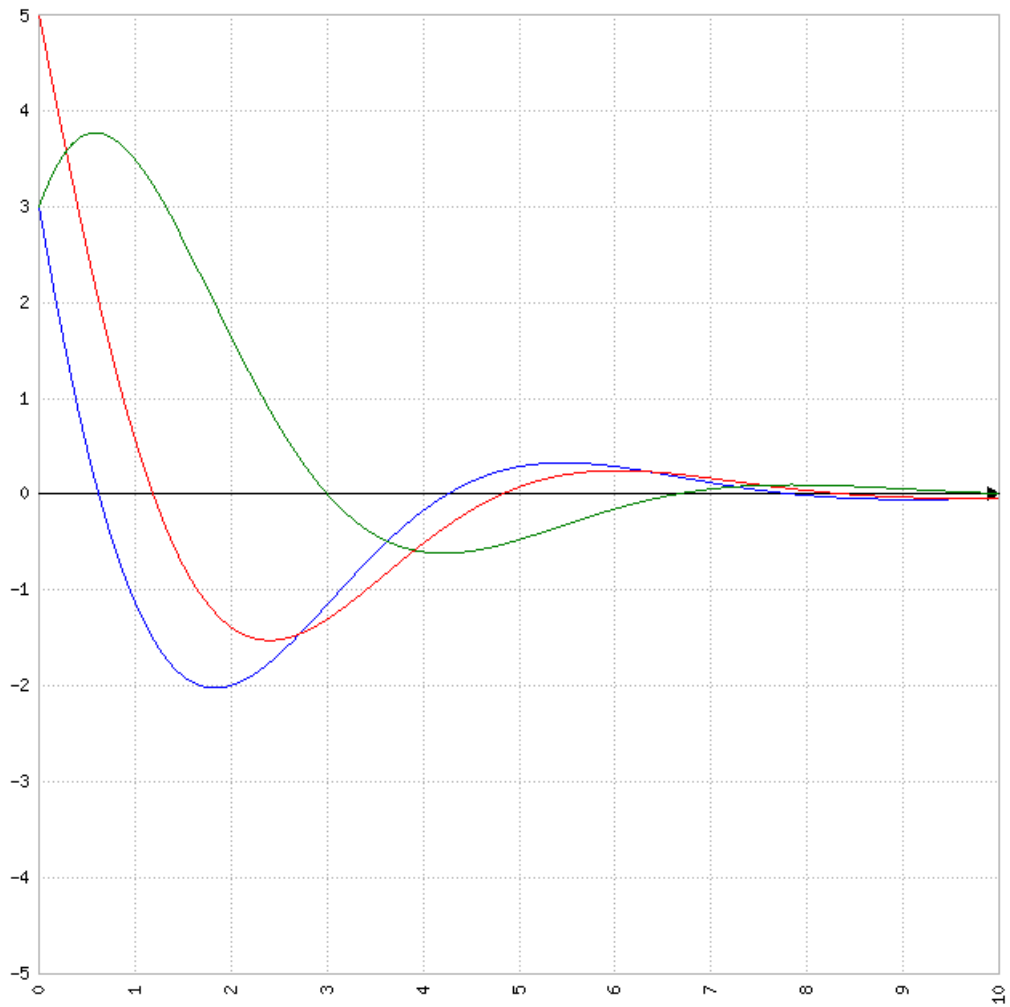


FIGURE 3 – Exemples de solutions en régime pseudo-périodique pour $Q = 1, \omega = 1, r = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$
 Courbe rouge : $a = -3, b = 5$
 Courbe verte : $a = 5, b = 3$
 Courbe bleue : $a = -5, b = 3$