La courbure

Première journée 4A 2023

Éloan Rapion

ENS Rennes

Variété riemannienne

Définition

Une **variété riemannienne** *est une variété différentielle M, avec, pour chaque point $x \in M$, un produit scalaire g_x sur l'espace tangent T_xM ; tel que g_x varie de manière $\mathcal{C}^\infty$ en fonction de x.*

(g est une section $\mathcal{C}^\infty$ du fibré $T^{\otimes 2}M$)

On a alors les notions de géométrie classique : distance, longueur, angle, volume, ligne droite (géodésique)...

Connexion

$I \subset \mathbb{R}$, $\gamma : I \to X$ courbe $\mathcal{C}^\infty$.

Définition

Un **champ de vecteur le long de** γ *est une fonction* $\mathcal{C}^\infty$ $V : I \to TM$ *telle que pour tout* $t \in I$, $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$.
On note $\mathcal{T}(\gamma)$ *leur ensemble.*

On peut "dériver" un champs de vecteur le long de γ grâce à la **connexion** $\nabla_\gamma : \mathcal{T}(\gamma) \to \mathcal{T}(\gamma)$ qui vérifie (entre autre) :

- $\mathbb{R}$-linéarité
- $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(I), V \in \mathcal{T}(\gamma)$:
$$\nabla_\gamma(fV) = f'V + f\nabla_\gamma(V)$$
- $\forall V, W \in \mathcal{T}(\gamma)$:
$$\mathrm{d}g(V, W)(\gamma') = g(\nabla_\gamma(V), W) + g(V, \nabla_\gamma(W)).$$

Transport parallèle

On considère un champ de vecteur $V \in \mathcal{T}(\Gamma)$ tel que $\nabla_{\gamma}(V) = 0$.

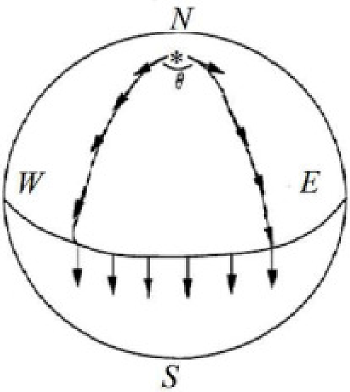


Figure – Source : Henri BOURLES. **Fundamentals of Advanced Mathematics V3**. Elsevier, 2019.

Tenseur de courbure de Riemann

$$R(u,v)w = \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u,v]} w$$

Théorème

La variété riemannienne M est localement isométrique à $\mathbb{R}^n$ ssi $R = 0$ partout.

En chaque point, le **tenseur de courbure de Riemann** prend 3 vecteurs en entrée et en retourne 1 en sortie (R section de $T^3_1(M)$).

Symétries

$\forall u, v, w, y \in T_x M$:

- $R(u, v) = -R(v, u)$;
- $g(R(u, v)w, y) = -g(R((u, v)y, w)$;
- $g(R(u, v)w, y) = g(R((w, y)u, v)$;
- $R(u, v)w + R(v, w)u + R(w, u)v = 0$ (identité de Bianchi algébrique).

Simplifications

Tenseur de Riemann $R(u, v)w$
Trilinéaire, diverses symétries
3 vecteurs en entrée, 1 vecteur en sortie
Section de $T^3_1(M)$

En prenant la trace (à v et w fixés) :
Tenseur de Ricci $Rc(v, w)$
Forme bilinéaire symétrique
2 vecteurs en entrée, scalaire en sortie
Section de $T^2(M)$

En prenant la trace (définie grâce à g) :
Courbure scalaire S
Scalaire
Section de $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Une application de la courbure scalaire

Proposition

Si S est la courbure scalaire en x, le volume de la boule centrée en x de rayon $r \to 0^+$ est :

$$vol(B_x(r)) = Cr^n \left(1 - \frac{S}{6(n+2)} r^2 + o(r^2)\right)$$

avec C le volume d'une boule de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$.

En dimension $n = 1$

En dimension 1 : $R = 0$.
Mais il y a une autre notion de courbure pour les variétés plongées :

Définition

Soit M une courbe plongée dans $\mathbb{R}^d$ (ie une sous-variété de dimension 1) orientée.

La **courbure géodésique** *en $x \in M$ est $\|\gamma''(0)\|$, pour $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to M$ un paramétrage de vitesse constante 1 tel que $\gamma(0) = x$.*

$\gamma''(0)$ est orthogonale à M en x.

Si $d = 2$ (courbe plane), la **courbure algébrique** est la courbure géodésique munie d'un signe indiquant si la base $(\gamma'(0), \gamma''(0))$ est directe.

En dimension $n = 2$

En dimension 2 : la donnée de R est celle d'un scalaire.

On considère un plongement isométrique de M dans $\mathbb{R}^3$ (on voit M comme une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, avec g la métrique induite).

En $x \in M$: on choisit $\mathbf{n}$ un des 2 vecteurs normaux à M en x de norme 1.

Pour $v \in T_x M$, on considère $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to M$ avec $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$. On pose :

$$b(v) := \langle \gamma''(0), \mathbf{n} \rangle$$

Alors b est une forme quadratique sur $T_x M$. Son déterminant (défini avec g) est la **courbure de Gauss** K.

Courbure de Gauss positive

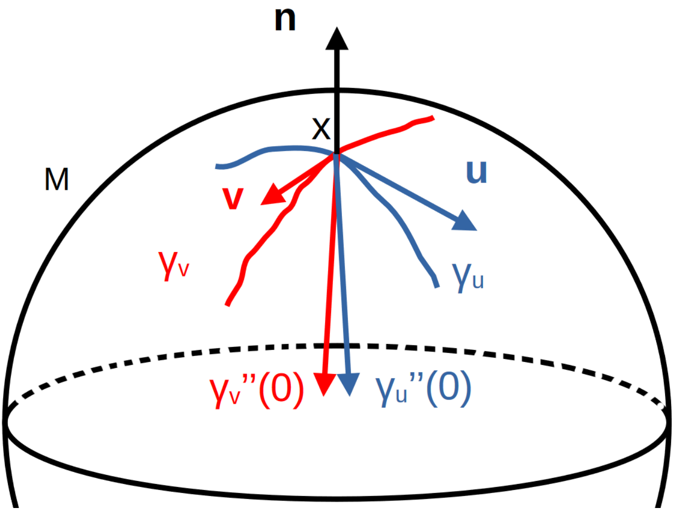
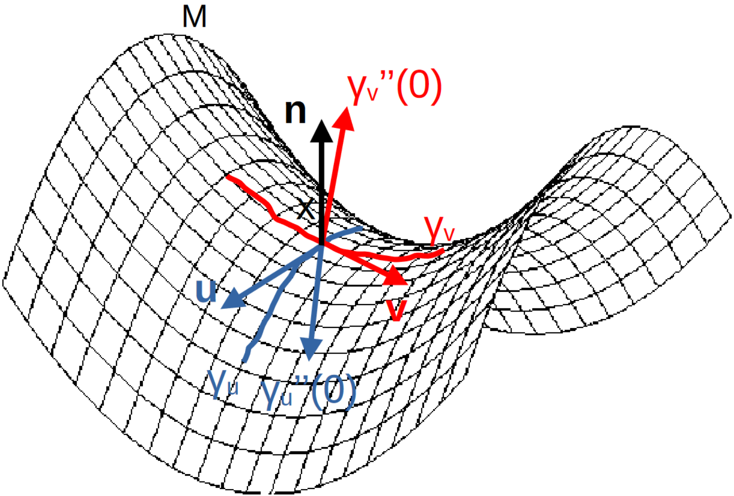
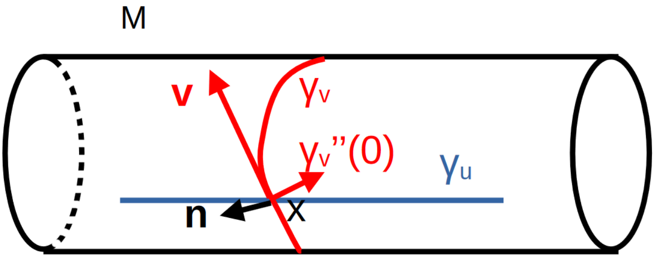


Figure – Modélisation : LibreOffice Draw

Courbure de Gauss négative



Courbure de Gauss nulle



En dimension $n = 2$

Théorème (Theorema Egregium)

La courbure de Gauss K détermine le tenseur de Riemann R, et réciproquement, via la formule :

$$g(R(u,v)w,y) = K \cdot (g(u,y)g(v,w) - g(u,w)g(v,y)).$$

De plus $S = 2K$ (S étant la courbure scalaire).

Théorème (Gauss-Bonnet)

Si M est compacte orientée :

$$\int_M K \,\mathrm{d}\omega = 2\pi\chi(M).$$

Courbure sectionnelle

Soit M une variété riemannienne quelconque, $x \in M$

Pour tout plan vectoriel $\Pi \subset T_x M$, il existe un "plan géodésique" $P \subset M$ tel que $x \in P$ et $T_x P = \Pi$.

Définition

La **courbure sectionnelle** *K de M en x est la fonction qui à un plan Π associe la courbure de Gauss de P en x.*

Proposition

La courbure sectionnelle détermine le tenseur de Riemann R, et réciproquement. Si u et v engendrent Π :

$$K(\Pi) = \frac{g(R(u,v)v,u)}{\|u\|^2\|v\|^2 - g(u,v)^2}.$$

Bibliographie

[1] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin et Jacques Lafontaine. **Riemannian geometry**. T. 2. Springer, 1990.

[2] John M Lee. **Riemannian manifolds : an introduction to curvature**. T. 176. Springer Science & Business Media, 2006.

[3] Yann Ollivier. "A visual introduction to Riemannian curvatures and some discrete generalizations". In : **Analysis and Geometry of Metric Measure Spaces : Lecture Notes of the 50th Séminaire de Mathématiques Supérieures (SMS), Montréal** 56 (2011), p. 197-219.