

# Structures projectives sur les surfaces de Riemann

Éloan Rapion

16 septembre 2022

## **Résumé**

Le stage a eu lieu du 27/06/22 au 17/09/22 et a été supervisé par Gerard Freixas i Montplet. Il portait sur l'article [2]. Le premier chapitre présente les bases sur les structures projectives. Le deuxième chapitre présente ensuite des définitions alternatives équivalentes. Enfin, le troisième chapitre présente une dernière définition qui est l'objet de l'article [2].

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
Remerciements . . . . .	3
Motivations . . . . .	3
Résumé . . . . .	5
<b>1 Structures projectives</b>	<b>6</b>
Notations . . . . .	6
1.1 Définition . . . . .	6
1.1.1 Faisceau des structures projectives . . . . .	7
1.2 Exemples de structures projectives . . . . .	7
1.2.1 Structure projective canonique . . . . .	8
1.2.2 Uniformisation de Schottky . . . . .	9
1.2.3 Uniformisation simultanée de Bers . . . . .	11
1.3 Application développante et monodromie . . . . .	12
1.3.1 Application développante . . . . .	12
1.3.2 Monodromie . . . . .	14
1.4 Comparaison des structures projectives . . . . .	14
1.4.1 Dérivée schwarzienne d'une fonction méromorphe . . . . .	14
1.4.2 Structures projectives et dérivée schwarzienne . . . . .	16
1.4.3 Le torseur des structures projectives . . . . .	19
1.5 Structure projective relative . . . . .	20
<b>2 Définition infinitésimale</b>	<b>23</b>
Notations . . . . .	23
2.1 Voisinages infinitésimaux et fibré osculateur . . . . .	23
2.1.1 Droite projective osculatrice . . . . .	23
2.1.2 Voisinage infinitésimaux . . . . .	24
2.1.3 Fibré osculateur . . . . .	25
2.2 Connexions projectives . . . . .	26
2.3 Définition par le faisceau des jets . . . . .	29
<b>3 Caractérisation par les trivialisations d'un fibré</b>	<b>31</b>
3.1 Définition du faisceau $L$ . . . . .	31
3.2 Diviseur $\Theta$ . . . . .	31
3.2.1 Lemmes sur le diviseur $\Theta$ . . . . .	31
3.2.2 Lien avec $L$ . . . . .	34
3.3 Trivialisations de $L$ . . . . .	34
3.4 Sections globales de $L$ . . . . .	37

3.5	Lien avec les structures projectives . . . . .	38
3.5.1	Lien avec la définition locale . . . . .	38
3.5.2	Lien avec la définition infinitésimale . . . . .	40

# Introduction

## Remerciements

Merci à Gerard Freixas i Montplet pour toutes ses explications et ses conseils. Merci à Matthieu Romagny qui me l'a recommandé. Merci à Téofil Adamski pour son aide précieuse sur LaTeX. Merci à Laurent, Valérie, Pascale, Maxence et Hortense pour avoir rendu le stage possible malgré les aléas de l'immobilier parisien.

## Motivations

La notion de structure projective est une construction géométrique. Elle prend racine dans l'étude des équations différentielles linéaires d'ordre 2 sur les surfaces de Riemann, à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle [11]. La définition classique est une définition locale, imitant celle des surfaces de Riemann. Une structure projective sur un ensemble est une structure de variété dont les cartes sont à valeur dans le sphère de Riemann  $\mathbb{P}^1$ , et les changements de cartes sont des transformations de Möbius directes.

Le langage de la géométrie analytique moderne permet une définition infinitésimale des structures projectives. Celle-ci est exposée dans [5]. Son rôle est à nouveau de permettre l'étude des équations différentielles linéaires d'ordre 2. À la différence de la première définition, toute l'information de la structure projective est contenue dans la donnée d'un seul et unique morphisme. Cela est permis par la définition d'un espace d'arrivée adéquat, le fibré osculateur. Le morphisme est défini sur le deuxième voisinage infinitésimal de la surface considérée : il décrit en chaque point le comportement infinitésimal des cartes.

Une troisième définition possible est exposée dans [2]. Elle est cette fois-ci issue de considérations liées à la théorie des champs quantiques. Celles-ci sont exposées dans [12], on en fait ici un bref résumé.

On considère une surface de Riemann compacte connexe  $S$  de genre  $g$  et un entier  $m \in \mathbb{N}^*$ . On considère également un faisceau inversible  $\alpha$  de degré  $g - 1$  qui n'a pas de section holomorphe globale non nulle. Un objet d'intérêt de la théorie des champs quantiques est la *fonction de corrélation*, notée  $C(m, m)$ , qui permet la modélisation d'un système composé dans le cas présent de  $2m$  particules. Ce n'est en réalité pas à proprement parler une fonction, mais une section méromorphe globale d'un faisceau inversible sur  $S^{2m}$ , faisceau induisant

$\alpha$  ou  $K_S \otimes \alpha^{-1}$  sur chaque coordonnée. Précisément, en notant  $p_k : S^{2m} \rightarrow S$  la projection sur la  $k$ -ième coordonnée ( $1 \leq k \leq 2m$ ),  $C(m, m)$  est une section méromorphe globale du faisceau inversible sur  $S^{2m}$  :

$$F_\alpha := p_1^* \alpha \otimes \cdots \otimes p_m^* \alpha \otimes p_{m+1}^* (K_S \otimes \alpha^{-1}) \otimes \cdots \otimes p_{2m}^* (K_S \otimes \alpha^{-1}).$$

Des contraintes physiques s'ajoutent. En notant  $D_{kk'}$  le diviseur d'équation  $p_k = p_{k'}$  pour  $1 \leq k < k' \leq 2m$ , on exige que  $C(m, m)$  présente :

- un zéro d'ordre au moins 1 sur les diviseurs  $D_{kk'}$  pour  $1 \leq k < k' \leq m$  ou  $m < k < k' \leq 2m$  ;
- un pôle d'ordre 1 sur les diviseurs  $D_{k, k+m}$  pour  $1 \leq k \leq m$ .

On impose également une contrainte supplémentaire pour simplifier l'étude : qu'il n'y ait pas d'autres pôles.

Posons le diviseur :

$$D = \sum_{1 \leq k < k' \leq m} D_{kk'} + \sum_{m < k < k' \leq 2m} D_{kk'} - \sum_{k=1}^m D_{k, k+m}.$$

Alors les contraintes imposent que  $C(m, m)$  soit une section globale de  $M_\alpha := F_\alpha \otimes \mathcal{O}(-D)$ . Or, on peut montrer que l'espace des sections globales de  $M_\alpha$  est de dimension 1. Ainsi, en normalisant, on obtient une unique fonction de corrélation.

Le cas qui nous intéresse est le cas  $m = 2$ . Alors  $D = D_{12} + D_{34} - D_{13} - D_{24}$ . On peut déjà entrevoir un lien avec les structures projectives : en effet,  $\mathcal{O}(D)$  a une section globale canonique, qui, dans le cas  $S = \mathbb{P}^1$ , est le birapport. On a ainsi une généralisation du birapport sur toute surface de Riemann compacte connexe.

Un objet intéressant en physique est la *fonction des courants*. Celle-ci est une section méromorphe globale du faisceau canonique de  $S^2$ . Elle est définie en considérant la restriction de  $C(2, 2)$  à  $D_{13} \cap D_{24}$ , après avoir soustrait la partie principale. La définir de manière rigoureuse exige de trivialisier le faisceau  $M_\alpha$  sur le schéma défini comme le premier voisinage infinitésimal de  $D_{13} \cap D_{24}$ .

La fonction des courants présente un pôle d'ordre 2 sur la diagonale. Elle permet elle-même de définir le *tenseur énergie-moment*, en considérant la restriction de la fonction des courants à la diagonale, après avoir soustrait la partie principale. À nouveau, la définition rigoureuse nécessite la trivialisiation d'un faisceau sur le deuxième voisinage infinitésimal de la diagonale. Il se trouve que le tenseur énergie-moment munit  $S$  d'une structure projective.

On constate ainsi que des procédés impliquant des trivialisations de faisceaux permettent de définir une structure projective sur  $S$ . L'objet de l'article [2] est de montrer précisément comment la trivialisiation d'un certain faisceau sur un voisinage infinitésimal de la diagonale de  $S^2$  définit une structure projective sur  $S$ , et réciproquement, comment toute structure projective peut être associée à une trivialisiation de ce faisceau.

## Résumé

Dans le premier chapitre, on présente une partie de la théorie classique des structures projectives. Après la définition et quelques exemples, on présente les notions d'application développante et de monodromie. Cette notion, qui se définit au niveau global, est au centre du lien entre structures projective et équations différentielles linéaires d'ordre 2 (lien qui n'est pas développée dans le présent mémoire). On définit ensuite la notion de dérivée schwarziennne. Cette notion, locale, permet de comparer des structures projectives. Elle munit l'ensemble des structures projectives sur une surface de Riemann donnée d'une structure d'espace affine. Ce fait nous sera très utile pour montrer l'équivalence des différentes définitions de structure projective : on montrera que la correspondance est bijective en montrant qu'elle est affine et que sa partie linéaire est l'identité. Finalement, on présente brièvement le cas relatif.

Dans le second chapitre, on présente deux définitions infinitésimales des structures projectives. La première est celle de Deligne [4]. La deuxième sert dans une preuve de [2]. On montre leur équivalence avec la définition initiale.

Enfin, le troisième et dernier chapitre développe la définition de l'article [2]. Son étude nécessite certains prérequis sur le diviseur  $\Theta$ , qui sont exposés en début de chapitre. Le lien avec les trois autres définitions est établi en fin de chapitre.

# Chapitre 1

## Structures projectives

Ce chapitre basé sur les articles [7] et [6], présente les notions de bases sur les structures projectives : définition, application développante, monodromie, dérivée schwarzienne, cas relatif.

### Notations

On note  $\mathbb{P}^1$  la sphère de Riemann. On note  $\mathcal{M}$  le groupe de Möbius, dont les éléments sont les transformations de Möbius directes. Soit  $S$  une surface de Riemann : on note  $\mathcal{Q}$  le faisceau des différentielles quadratiques holomorphes sur  $S$ ,  $\mathcal{Q}(S)$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des sections globales.

### 1.1 Définition

**Définition 1.1** (Carte, atlas, structure projective). *Soit  $S$  un espace topologique séparé. Une carte projective sur  $S$  est la donnée  $(U, \phi)$  d'un ouvert  $U$  de  $S$ , et d'un homéomorphisme  $\phi$  de  $U$  vers un ouvert de  $\mathbb{P}^1$ .*

*Un atlas projectif sur  $S$  est un ensemble de cartes projectives  $(U, \phi)$  sur  $S$  telles que :*

- les  $U$  recouvrent  $S$  ;
- pour  $(U_1, \phi_1)$  et  $(U_2, \phi_2)$  deux cartes de l'atlas et  $W$  une composante connexe de  $\phi_1(U_1 \cap U_2)$ ,  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$  définie sur  $W$  est la restriction d'une transformation de Möbius directe.

*Une structure projective sur  $S$  est un atlas projectif maximal pour l'inclusion.*

**Remarques 1.2.** 1. *Un atlas projectif est inclus dans une unique structure projective : pour définir une structure projective, il suffit donc de décrire un atlas projectif.*

2. *Une structure projective est un atlas holomorphe, qui induit une structure de surface de Riemann sur  $S$ , dite sous-jacente. Lorsque l'on considère une surface de Riemann  $S$ , les structures projectives dites sur  $S$  sont celles dont la structure de surface de Riemann sous-jacente est celle de  $S$ . On note  $\mathcal{P}(S)$  cet ensemble. On sera toujours dans ce cas de figure dans la suite.*



Soit  $S, S'$  deux surfaces de Riemann,  $f : S \rightarrow S'$  un isomorphisme,  $P \in \mathcal{P}(S)$  une structure projective sur  $S$ . Alors on peut transporter la structure projective  $P$  vers  $S'$  en définissant  $P' = \{(f(U), \phi \circ f^{-1}), (U, \phi) \in P\}$ .

Si l'on peut obtenir une structure projective  $P'$  en transportant une structure projective  $P$ ,  $P$  et  $P'$  sont dites *isomorphes*. Comme usuellement, les propriétés des structures projectives se conservent par isomorphisme.

On peut faire agir le groupe des automorphismes de  $S$  sur l'ensemble  $\mathcal{P}(S)$  de ses structures projectives. Pour  $f$  un automorphisme et  $P$  une structure projective, on pose  $f.P$  la structure projective qui résulte du transport de  $P$  par  $f$ .

### 1.1.1 Faisceau des structures projectives

Si on considère les structures projectives sur chaque ouvert d'une surface de Riemann  $S$ , leur collection est organisée en un faisceau d'ensembles sur  $S$ . La restriction consiste à ne retenir que les cartes dont le domaine est inclus dans l'ouvert sur lequel on se restreint. On note  $\mathcal{P}$  ce faisceau ( $\mathcal{P}(S)$  étant bien entendu l'ensemble des sections globales).

Considérons  $S$  une surface de Riemann connexe,  $P, Q \in \mathcal{P}(S)$ ,  $U$  un ouvert non vide de  $S$ . Si  $P|_U = Q|_U$ , alors  $P = Q$ . En effet, soit  $V$  le plus grand ouvert tel que  $P|_V = Q|_V$ . Soit  $x \in S \setminus V$ . Alors il existe un voisinage ouvert connexe  $W$  de  $x$  et deux cartes  $(W, \phi) \in P, (W, \psi) \in Q$  telles que  $\phi \circ \psi^{-1}$  n'est pas la restriction d'une transformation de Möbius direct. Alors  $W \subset S \setminus V$  : en effet, si on avait  $y \in V \cap W$ ,  $\phi \circ \psi^{-1}$  serait une transformation de Möbius au voisinage de  $\psi(y)$ , ce qui est impossible par principe du prolongement analytique. Ainsi  $V$  est ouvert fermé et inclut  $U$ , donc  $V = S$ .

## 1.2 Exemples de structures projectives

On commence par deux exemples triviaux.

**Exemples 1.3.** 1. La sphère de Riemann  $\mathbb{P}^1$  ainsi que ses ouverts comme  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{H}$  ont une structure projective donnée par l'atlas dont l'unique carte est l'inclusion dans  $\mathbb{P}^1$ .

2. Une surface de Riemann isomorphe à  $\mathbb{P}^1, \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$  admet une structure projective canonique donnée par transport de structure. En effet, les automorphismes de surface de Riemann de  $\mathbb{P}^1, \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$  préservent la structure projective précédemment définie.

À partir de ces deux exemples, les deux propositions suivantes permettent de définir une large variété de structures projectives.

**Proposition 1.4.** Soit  $S, T$  deux surfaces de Riemann,  $P \in \mathcal{P}(T)$ ,  $f : S \rightarrow T$  holomorphe sans point critique. Alors l'ensemble  $\{(U, \phi \circ f), U \subset S \text{ ouvert sur lequel } f \text{ est injective}, (V, \phi) \in P, f(U) \subset V\}$  est un atlas projectif sur  $S$ .

Dans le cas d'un revêtement galoisien, ce procédé peut être inversé.

**Proposition 1.5.** *Soit  $S$  une surface de Riemann munie d'une structure projective  $P$ . Soit  $G$  un groupe et  $\rho$  une action proprement discontinue de  $G$  sur  $S$  telle que pour tout  $a \in G, \rho(a).P = P$ . Soit  $p : S \rightarrow S/G$  la projection canonique. Alors l'ensemble  $\{(V, \phi \circ q), V \subset S/G$  trivialisant,  $q$  section de  $p$  sur  $V, (U, \phi) \in \mathcal{P}, q(V) \subset U\}$  est un atlas projectif sur  $S/G$ .*

Remarquons dans ce cas que si l'on applique la proposition 1.4 pour définir sur  $S$  une structure projective à partir de celle définie sur  $S/G$ , on retombe sur la structure projective initiale. Réciproquement, si  $S/G$  est munit d'une structure projective, la proposition 1.4 permet d'en déduire une sur  $S$ , qui est invariante par  $G$ , et on retrouve la structure initiale en appliquant la proposition 1.5. Il y a ainsi bijection entre  $\mathcal{P}(S/G)$  et les structures projectives sur  $S$  invariantes par l'action de  $G$ .

**Exemple 1.6.** *Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère le revêtement galoisien :*

$$p_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \rightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & z^n. \end{array}$$

*Les deux propositions précédentes permettent de transporter une structure projective sur  $\mathbb{C}^*$  (par exemple celle donnée par l'inclusion  $\mathbb{C}^* \subset \mathbb{P}^1$ ) de long de chacune de ces fonctions, dans un sens ou dans l'autre. On peut ainsi obtenir diverses structures projectives sur  $\mathbb{C}^*$ .*

### 1.2.1 Structure projective canonique

On commence par montrer que toute surface de Riemann admet une structure projective. On peut même en distinguer une canonique.

Soit  $S$  une surface de Riemann. On peut procéder indépendamment sur chaque composante connexe, donc on suppose  $S$  connexe. Soit  $\tilde{S}$  le revêtement universel de  $S$ . Alors  $S$  est le quotient de  $\tilde{S}$  par le groupe fondamental  $\pi_1(S)$  de  $S$ . Par le théorème d'uniformisation de Riemann, trois cas sont possibles :

- $\tilde{S}$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^1$ , alors  $S = \tilde{S}$  a une structure projective canonique ;
- $\tilde{S}$  est isomorphe à  $\mathbb{C}$ , alors  $\pi_1(S)$  agit par translations donc préserve la structure projective de  $\tilde{S}$ , qui passe alors au quotient ;
- $\tilde{S}$  est isomorphe à  $\mathbb{H}$ , alors  $\pi_1(S)$  est un groupe fuchsien dont l'action préserve la structure projective de  $\tilde{S}$ , qui passe donc au quotient.

Dans tous les cas, on constate que  $S$  est munie d'une structure projective canonique.

**Exemple 1.7.** *On considère le cas de  $\mathbb{C}^*$ . Le revêtement universel est donné par  $\mathbb{C}$  et l'exponentielle  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ . Une carte projective de la structure canonique, que l'on notera  $C$ , est donnée par  $(U, \phi)$  avec  $U$  un ouvert simplement connexe de  $\mathbb{C}^*$  et  $\phi$  un logarithme.*

*Cette structure projective est distincte de celle donnée par l'inclusion  $\mathbb{C}^* \subset \mathbb{P}^1$ , que l'on notera  $I$ . En effet, le passage d'une carte de la structure canonique à une carte de cette dernière structure projective se fait par la fonction exponentielle, qui n'est pas une transformation de Möbius. On montrera plus tard que les deux structures ne sont même pas isomorphes.*

**Exemple 1.8.** On considère le cas d'une surface de Riemann connexe compacte de genre 1. Soit  $\Gamma$  un réseau de  $\mathbb{C}$ , soit  $S := \mathbb{C}/\Gamma$  et  $p : \mathbb{C} \rightarrow S$  la projection canonique. On considère la structure projective canonique de  $S$ . Soit  $x \in S$  : on considère  $x_0$  un antécédant de  $x$  par  $p$ . Soit  $V$  l'intérieur d'un domaine fondamental tel que  $x_0 \in V$ . Alors en posant  $U := p(V)$ ,  $(U, p^{-1})$  est une carte projective. Les applications de changement de carte sont des translations locales, de vecteur un élément de  $\Gamma$ .

On peut constater que cette structure projective est invariante par automorphisme de surface de Riemann. En effet, un automorphisme de  $\mathbb{C}/\Gamma$  se relève sur  $\mathbb{C}$  en une fonction linéaire, qui est une transformation de Möbius directe.

### 1.2.2 Uniformisation de Schottky

Un exemple important de structure projective à priori différente de la structure canonique est donné par l'uniformisation de Schottky. Elle permet de définir des surfaces de Riemann connexes compactes munies de structures projectives pour tous les genres.

Soit  $g$  un entier naturel. On considère  $2g$  cercles de  $\mathbb{P}^1$   $(C_k^+)_{1 \leq k \leq g}$  et  $(C_k^-)_{1 \leq k \leq g}$ . Le complémentaire de chaque cercle a deux composantes connexes : pour chacun, on choisit l'une des deux, que l'on note  $(D_k^+)_{1 \leq k \leq g}$  et  $(D_k^-)_{1 \leq k \leq g}$ . On suppose que tous les  $C_k^\pm$  et les  $D_k^\pm$  sont disjoints. Pour chaque  $i \in \llbracket 1, g \rrbracket$ , on considère une transformation de Möbius directe  $f_k$  telles que  $f_k(C_k^-) = C_k^+$  et  $f_k(D_k^-)$  est disjoint de  $D_k^+$  (c'est alors simplement l'autre composante connexe du complémentaire de  $C_k^+$ ).

On considère alors  $G$  le sous-groupe de  $\mathcal{M}$  engendré par les  $f_k$  : c'est un groupe de Schottky. C'est un groupe libre sur les  $f_k$ . On pose  $U$  l'ouvert de  $\mathbb{P}^1$  défini comme le complémentaire de l'ensemble des points limites de  $\mathbb{P}^1$  sous l'action de  $G$  (on peut montrer que pour  $g \geq 2$  ce fermé est un ensemble de Cantor). Alors  $S$  a une structure projective donnée par l'inclusion, et  $G$  agit proprement discontinuement sur  $U$ , en préservant la structure projective. Le quotient, qui est une surface de Riemann connexe compacte de genre  $g$ , est alors muni d'une structure projective.

Un domaine fondamental est donné par  $\mathbb{P}^1$  privée des  $D_k^\pm$  : chaque orbite contient soit exactement un point dans  $\mathbb{P}^1$  privée des  $D_k^\pm$ , dans ce cas le point n'est dans aucun  $C_k^\pm$ , soit exactement deux points dans  $\mathbb{P}^1$  privée des  $D_k^\pm$ , dans ce cas il y a un  $k$  tel qu'un des points est dans  $C_k^-$  et l'autre dans  $C_k^+$ .

Intuitivement, la construction de  $S$  consiste à enlever les disques  $D_k^\pm$  et à coller les cercles deux par deux suivant les  $f_k$ .

**Exemple 1.9.** On considère le cas  $g = 1$  (on omet l'indice dans les notations). Soit  $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , posons  $\Gamma = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ ,  $a = \exp\left(\frac{2i\pi}{\tau}\right)$ ,  $r = |a|$  (alors  $r \neq 1$ ).

On pose  $C^- = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ ,  $C^+ = \{z \in \mathbb{C}, |z| = r\}$ . Si  $r > 1$ , on pose  $D^- = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$  et  $D^+ = \{z \in \mathbb{C}, |z| > r\} \cap \{\infty\}$  (si  $r < 1$ , on inverse les inégalités et c'est  $D^-$  qui contient  $\infty$ ). On pose  $f : z \mapsto az$ ,  $G$  le sous-groupe de  $\mathcal{M}$  engendré par  $f$ . Les points limites sont 0 et  $\infty$ , on pose donc  $S := \mathbb{C}^*/G$  et  $q : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*/G$  la projection. Voir la figure 1.9 (la zone en gris est un domaine fondamental).

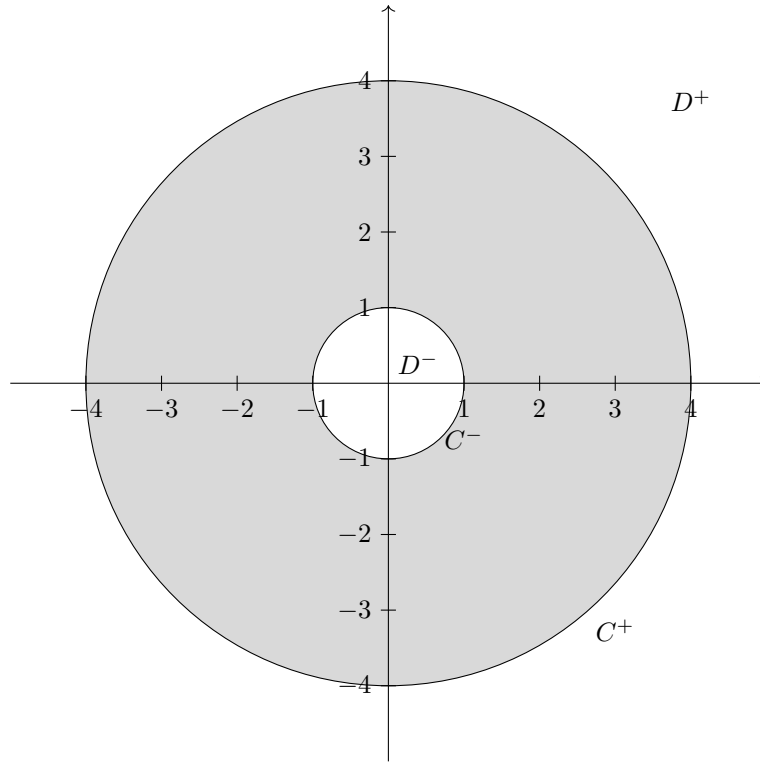


FIGURE 1.1 – Exemple d’uniformisation de Schottky ( $g = 1, \tau = \frac{i\pi}{\ln 2}, a = r = 4$ )

Alors l’application :

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{C}/\Gamma &\rightarrow S \\ z &\mapsto q\left(\exp\left(\frac{2i\pi z}{\tau}\right)\right) \end{aligned}$$

est bien définie et est un isomorphisme entre  $\mathbb{C}/\Gamma$  et  $S$ . On peut alors étudier la structure projective définie sur  $\mathbb{C}/\Gamma$  par transport de structure.

On considère un couple  $(U, V)$  d’ouverts de  $\mathbb{C}/\Gamma$  et  $\mathbb{C}$  définis comme dans l’exemple 1.8, ainsi que  $p : V \rightarrow U$  le passage au quotient. Alors  $\left(U, x \mapsto \exp\left(\frac{2i\pi p^{-1}(x)}{\tau}\right)\right)$  est une carte projective. Les applications de changement de cartes sont localement linéaires, avec pour coefficient une puissance entière de  $a$ .

Cette structure projective est distincte la structure projective canonique : en effet, l’exponentielle n’est pas une transformation de Möbius. Plus précisément, elle ne sont même pas isomorphes, à cause de la remarque à la fin de l’exemple 1.8.

**Exemple 1.10.** On considère  $g = 2$  et :

- $C_1^-$  de centre 0 de rayon 5,  $D_1^-$  à l’intérieur ;
- $C_1^+$  de centre 0 de rayon 20,  $D_1^+$  à l’extérieur (contenant  $\infty$ ) ;
- $C_2^-$  de centre  $-13$  de rayon 5,  $D_2^-$  à l’intérieur ;
- $C_2^+$  de centre 13 de rayon 5,  $D_2^+$  à l’intérieur.

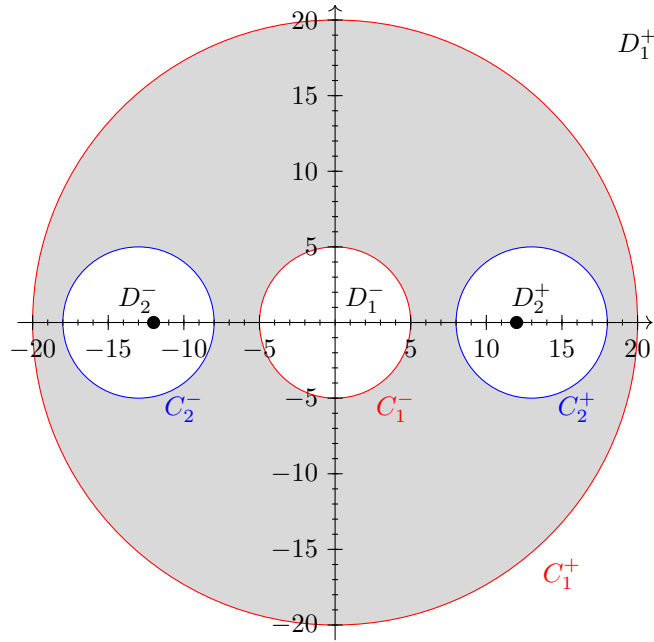


FIGURE 1.2 – Exemple d’uniformisation de Schottky ( $g = 2$ )

On pose  $f_1 : z \rightarrow 4z$  et  $f_2 : z \rightarrow \frac{13z+144}{z+13}$ . La deuxième transformation est hyperbolique de points fixes  $-12$  et  $12$ .

Dans ce cas, les points limites sont inclus dans  $\mathbb{R}$ . Le quotient de  $\mathbb{C}$  privé des points critiques par le groupe engendré par  $f_1$  et  $f_2$  est une surface de Riemann connexe compacte de genre 2. Voir figure 1.10 (la zone en gris étant un domaine fondamental, les points noirs les points fixes de  $f_2$ ).

### 1.2.3 Uniformisation simultanée de Bers

On considère une courbe de Jordan  $C$  dans  $\mathbb{P}^1$ . Alors  $\mathbb{P}^1 \setminus C$  a deux composantes connexes, que l’on note  $D_1$  et  $D_2$ . On considère un groupe kleinien (un sous-groupe discret de  $\mathcal{M}$ ) dont  $C$  est l’ensemble des points limites et qui stabilise  $D_1$  (et donc  $D_2$ ). Un groupe kleinien pouvant être défini ainsi est dit *quasi-fuchsien* (associé à  $C$ ). Comme dans le cas de la structure canonique, si le groupe agit proprement discontinuement sur  $\mathbb{P}^1 \setminus C$ , les quotients de  $D_1$  et  $D_2$  sont munis d’une structure projective.

Cet exemple est intéressant parce qu’on dispose du théorème d’uniformisation simultanée, montré dans [1].

**Théorème 1.11** (Bers, 1960). *Soit  $S, T$  deux surfaces de Riemann connexes compactes de même genre. Alors il existe une courbe de Jordan  $C$  et un groupe quasi-fuchsien  $G$  associé à  $C$  agissant proprement discontinuement sur  $\mathbb{P}^1 \setminus C$  tel que  $(\mathbb{P}^1 \setminus C)/G$  soit une surface de Riemann isomorphe à  $S \sqcup T$ .*

## 1.3 Application développante et monodromie

### 1.3.1 Application développante

L'application développante permet d'étudier une structure projective au niveau global. Intuitivement, on souhaiterait pouvoir décrire une structure projective sur une surface de Riemann  $S$  avec une seule carte projective  $(S, \phi)$ . C'est bien sûr impossible en général. Nous allons alors définir l'application développante, qui se rapproche dans ce que l'on souhaiterait. On commence par la définir dans le cas simplement connexe.

**Proposition 1.12.** *Soit  $S$  une surface de Riemann simplement connexe munie d'une structure projective  $P$ . Il existe une fonction  $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1$  telle que pour tout  $x \in S$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  tel que  $(U, f|_U)$  est une carte projective de  $P$ . De plus, si  $S \neq \emptyset$ , une fonction  $h$  vérifie cette propriété si et seulement s'il existe  $\sigma \in \mathcal{M}$  tel que  $h = \sigma \circ f$ .*

**Remarque 1.13.** *La fonction  $f$  est alors holomorphe, plus précisément c'est un biholomorphisme local.*

*Démonstration.* On suppose  $S$  non vide, on fixe un  $x \in S$  et une carte  $(U, \phi) \in P$  telle que  $x \in U$ . Soit  $y \in S$ . On considère  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$  un chemin continu dont les extrémités sont  $x$  et  $y$ . Par compacité, il existe un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , une suite  $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$  dans  $[0, 1]^n$  et une suite de cartes  $(U_k, \phi_k)_{1 \leq k < n} \in P^n$  telles que :

- $a_1 = 0, a_n = 1, (U_1, \phi_1) = (U, \phi)$ ;
- pour  $1 \leq k < n : a_k \leq a_{k+1}, \gamma([a_k, a_{k+1}]) \subset U_k$ .

On définit une suite  $(\psi_k)_{1 \leq k < n}$  par récurrence de manière à ce que  $(U_k, \psi_k)_{1 \leq k < n}$  soit une suite de cartes de  $P$ . On pose  $\psi_1 = \phi_1$ . Pour  $1 \leq k < n - 1$ , on pose  $\psi_{k+1}$  la composée de  $\phi_{k+1}$  par une transformation de Möbius de manière à ce que  $\psi_k$  et  $\psi_{k+1}$  coïncident sur la composante connexe de  $U_k \cap U_{k+1}$  contenant  $\gamma(a_{k+1})$ . On pose alors  $f(y) := \psi_{n-1}(y)$ .

Montrons que la valeur de  $f(y)$  ne dépend pas du choix de  $\gamma$  ni de celui des  $n, (a_k), (U_k, \phi_k)$ . Par définition, la valeur donnée en  $y$  est celle d'un prolongement méromorphe de  $\phi$  le long d'un chemin. Par simple connexité, il n'y a qu'une valeur possible.

Montrons que  $f$  vérifie la propriété recherchée. Cela résulte du fait que, sur un voisinage simplement connexe de  $y$  inclus dans  $U_n$ , on peut prolonger  $\gamma$  par concaténation et utiliser la même suite de cartes : sur ce voisinage,  $f$  est alors égale à  $\psi_n$ .

Montrons la dernière phrase. Le sens réciproque est immédiat. Pour le sens direct, soit  $h$  une fonction vérifiant la même propriété que  $f$ . Par définition d'une structure projective, il existe  $\sigma \in \mathcal{M}$  telle qu'au voisinage de  $x$ ,  $h = \sigma \circ f$ . On conclut par théorème du prolongement analytique.  $\square$

Dans le cas général, il n'est pas possible de procéder ainsi. En effet, considérons le cas de la structure projective canonique de  $\mathbb{C}^*$  : l'existence d'une telle fonction équivaut à l'existence d'un logarithme holomorphe défini sur  $\mathbb{C}^*$  entier, ce qui n'est pas possible. On définit alors  $f$  sur le revêtement universel.

**Définition 1.14** (Application développante). *Soit  $S$  une surface de Riemann connexe munie d'une structure projective  $P$ . on considère le revêtement universel  $\tilde{S}$  de  $S$ , muni de la structure projective  $\tilde{P}$  donnée à partir de  $P$  par la proposition*

1.4. Une application développante de  $P$  est une fonction  $f : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{P}^1$  donnée par la proposition précédente appliquée à  $\tilde{P}$ .

**Remarques 1.15.** 1. Si  $S$  est simplement connexe, l'application développante est directement  $f$ .

2. L'application développante est définie à composition par une transformation de Möbius directe près.

3. Une application développante caractérise la structure projective.

**Exemples 1.16.** 1. Dans le cas de la structure canonique, on a un isomorphisme  $h$  de  $\tilde{S}$  vers  $\mathbb{C}, \mathbb{H}$  ou  $\mathbb{P}^1$ . Soit  $j$  l'inclusion de ce dernier dans  $\mathbb{P}^1$ . Alors  $j \circ h$  est une application développante.

2. L'uniformisation de Schottky nous donne un revêtement  $U \rightarrow S$  avec  $U$  un ouvert de  $\mathbb{P}^1$ . Le revêtement universel  $\tilde{S} \rightarrow S$  se factorise alors par un revêtement  $r : \tilde{S} \rightarrow T$ . La composition de l'inclusion  $T \subset \mathbb{P}^1$  et de  $r$  est une application développante.

3. Dans le cas de  $\mathbb{C}^*$ , en reprenant les notations de l'exemple 1.7, la structure projective canonique  $C$  a l'inclusion de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{P}^1$  pour application développante. La structure projective  $I$  a l'exponentielle pour application développante. L'une est injective et pas l'autre : cela montre que les deux structures projectives  $C$  et  $I$  ne sont pas isomorphes.

L'existence de l'application développante permet de montrer l'unicité de la structure projective sur  $\mathbb{P}^1$ .

**Proposition 1.17.** La structure projective canonique est la seule structure projective sur  $\mathbb{P}^1$ .

*Démonstration.* Une application développante est une fonction holomorphe sans point critique  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Ainsi  $f \in \mathcal{M}$ , donc la structure projective possible est la canonique.  $\square$

On a également une preuve plus simple du fait que deux structures projectives sur une surface de Riemann connexe égales sur un ouvert sont égales : il suffit d'appliquer le principe du prolongement analytique aux applications développantes.

Enfin, notons que l'on peut définir une structure projective à partir d'une application développante. En effet, soit  $S$  une surface de Riemann connexe. Notons  $\pi_1(S)$  le groupe fondamental de  $S$ , défini comme le groupe des automorphismes de revêtement de  $\tilde{S}$  sur  $S$ . Soit  $f$  une fonction méromorphe sans point critique sur  $\tilde{S}$  telle que pour tout  $\gamma \in \pi_1(S)$ , il existe  $\sigma \in \mathcal{M}$  telle que  $f \circ \gamma = \sigma \circ f$ . Alors  $f$  définit une structure projective sur  $\tilde{S}$ , un atlas étant donné par les restrictions de  $f$  qui sont des cartes. Cette structure est stable par l'action de  $\pi_1(S)$ , donc la proposition 1.5 donne une structure projective sur  $S$ , dont  $f$  est une application de développante.

**Exemple 1.18.** Soit  $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \Gamma := \mathbb{Z} + \tau \mathbb{Z}$ . Soit  $c \in \mathbb{C}^*$ . On pose :

$$\begin{aligned} f_c : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{P}^1 \\ z &\mapsto \exp(cz). \end{aligned}$$

Alors  $f_c$  est application développante d'une structure projective  $P_c$  sur  $\mathbb{C}/\Gamma$ . Dans le cas  $c = \frac{2i\pi}{\tau}$ , on retrouve la structure projective de l'exemple 1.9. Remarquons que  $P_c = P_{-c}$  car l'inversion est dans  $\mathcal{M}$ .

### 1.3.2 Monodromie

Nous avons pu constater qu'en dehors du cas simplement connexe, l'application développante est mal définie si on essaie de le faire directement sur  $S$ . La monodromie décrit la manière dont les éléments non neutres du groupe fondamental impliquent la multivaluation de  $f$  en un point de  $S$ .

**Définition 1.19** (Représentation de monodromie). *Soit  $S$  une surface de Riemann connexe non vide munie d'une structure projective  $P$ ,  $f : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{P}^1$  une application développante. Soit  $\pi_1(S)$  le groupe fondamental de  $S$ . Pour tout  $\gamma \in \pi_1(S)$ , il existe une unique  $\sigma \in \mathcal{M}$  telle que  $\forall x \in \tilde{S}, f(\gamma.x) = \sigma(f(x))$ . On obtient ainsi un morphisme de groupe  $\pi_1(S) \rightarrow \mathcal{M}$  qui est une représentation de monodromie de  $\pi_1(S)$ .*

**Remarque 1.20.** *Comme l'application développante est définie à composition par un élément de  $\mathcal{M}$  près, la représentation de monodromie est définie à composition par un automorphisme intérieur de  $\mathcal{M}$  près.*

**Exemples 1.21.**

1. *Les représentations de monodromie de la structure canonique sont injectives. L'une d'elles a pour image le groupe trivial, un groupe engendré par une translation, un réseau ou un groupe fuchsien.*
2. *Dans le cas de l'uniformisation de Schottky, une représentation de monodromie a pour image un groupe de Schottky. Elle n'est pas injective.*
3. *La représentation de monodromie d'une structure projective donnée par l'inclusion d'un ouvert dans  $\mathbb{P}^1$  est triviale.*
4. *Soit  $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \Lambda = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}, S = \mathbb{C} / \Lambda$ . Alors  $\pi_1(S)$  s'identifie à  $\Lambda$ . Dans le cas de la structure canonique, l'injection de  $\Gamma$  dans  $\mathcal{M}$  donnée par les translations est une représentation de monodromie. Pour  $c \in \mathbb{C}^*$ , une représentation de monodromie de  $P_c$  définie dans l'exemple 1.18 est le morphisme qui à  $v$  associe  $z \mapsto \exp(cvz)$ .*

## 1.4 Comparaison des structures projectives

On développe ici un outil qui permet de distinguer les structures projectives et de donner une structure d'espace affine à leur ensemble : la dérivée schwarzienne.

### 1.4.1 Dérivée schwarzienne d'une fonction méromorphe

On sait que l'action du groupe de Möbius  $\mathcal{M}$  sur la sphère de Riemann  $\mathbb{P}^1$  est simplement 3-transitive. Ce résultat a une variante infinitésimale : si on fixe un point  $x \in \mathbb{C}$  et trois valeurs  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$  avec  $\beta \neq 0$ , il existe une unique transformation de Möbius directe  $\sigma$  telle que  $\sigma(x) = \alpha, \sigma'(x) = \beta$  et  $\sigma''(x) = \gamma$ . La formulation qui suit permet d'inclure le cas de l'infini.

**Proposition 1.22.** *Soit  $x \in \mathbb{P}^1$  et  $f$  une fonction méromorphe définie sur un voisinage de  $x$  et dont  $x$  n'est pas un point critique. Alors il existe une unique transformation de Möbius directe  $\sigma$  telle que  $f - \sigma$  a un zéro d'ordre au moins 3 en  $x$ .*



*Démonstration.* Comme  $\mathcal{M}$  agit transitivement sur  $\mathbb{P}^1$ , il existe  $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{M}$  tels que  $\tau_1(0) = x$  et  $\tau_2(0) = f(x)$ . Alors l'ensemble  $\{\sigma \in \mathcal{M}, f - \sigma \text{ a un zéro d'ordre } \geq 3 \text{ en } x\}$  est égal à l'ensemble  $\{\tau_2 \circ \rho \circ \tau_1^{-1}, \rho \in \mathcal{M}, \tau_2^{-1} \circ f \circ \tau_1 - \rho \text{ a un zéro d'ordre } \geq 3 \text{ en } 0\}$ .

On peut ainsi se ramener au cas  $x = f(x) = 0$ . On pose  $\beta := f'(0) \in \mathbb{C}^*$  et  $\gamma := f''(0) \in \mathbb{C}$ . Il suffit de montrer qu'il existe une unique  $\sigma \in \mathcal{M}$  telle que  $\sigma(0) = 0, \sigma'(0) = \beta, \sigma''(0) = \gamma$ .

Pour  $\sigma \in \mathcal{M}$  tel que  $\sigma(0) = 0$ , il existe un unique couple  $a \in \mathbb{C}^*$  et  $c \in \mathbb{C}$  tels que pour  $\sigma \in \mathcal{M}$ ,  $\sigma(z) = \frac{az}{cz+1}$ . Alors un développement limité donne  $\sigma'(0) = a, \sigma''(0) = -2ac$ . Le système d'équations :

$$\begin{cases} a = \beta \\ -2ac = \gamma \end{cases}$$

admet une unique solution  $(a, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ , donc un unique  $\sigma \in \mathcal{M}$  résout le problème. □

Ainsi, il n'y a pas de contrainte sur la valeur d'une transformation de Möbius en un point, ainsi que sur ses dérivées premières et secondes. La dérivée troisième sera par contre imposée par celles-ci. Pour déterminer une relation, on considère  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  tels que  $ad - bc = 1$ . On pose  $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ . Alors pour  $z \in \mathbb{C}$  avec  $z \neq -\frac{d}{c}$  si  $c \neq 0$ , on a  $f'(z) = \frac{1}{(cz+d)^2}, f''(z) = -\frac{2c}{(cz+d)^3}, f'''(z) = \frac{6c^2}{(cz+d)^4}$ . On obtient la relation  $f' f''' - \frac{3}{2} f''^2 = 0$  (remarquons que la valeur de  $f$  n'intervient pas, car une translation est une transformation de Möbius). Pour des raisons d'invariance qui seront explicitées plus tard, on préfère diviser la relation par  $f'^2$  pour définir la dérivée schwarzienne.

**Définition 1.23** (Dérivée schwarzienne, 1<sup>ère</sup> définition). *Soit  $f : U \subset \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  une fonction méromorphe nul part localement constante définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{P}^1$ . La dérivée schwarzienne de  $f$  est la fonction méromorphe sur  $U$  :*

$$Sf = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''}{f'} \right)^2.$$

**Exemples 1.24.** 1.  $S \exp = -\frac{1}{2}$  ;

2. pour  $c \in \mathbb{C}^*, f_c : z \mapsto \exp(cz)$ , on a  $S f_c = -\frac{c^2}{2}$  ;

3. si  $L$  est un logarithme :  $S L : z \mapsto \frac{1}{2z^2}$  ;

4. pour  $n \in \mathbb{Z}^*, p_n : z \mapsto z^n$ , on a  $S p_n : z \mapsto \frac{1-n^2}{2z^2}$ .

5. pour  $r \in \mathbb{C}^*, p_r : z \mapsto z^r$  définie avec un logarithme, on a  $S p_r : z \mapsto \frac{1-r^2}{2z^2}$ .

La dérivée schwarzienne permet ainsi de constater localement si une fonction méromorphe est une transformation de Möbius ou pas.

**Proposition 1.25.** *Soit  $U \subset \mathbb{P}^1$  un ouvert connexe,  $f$  une fonction méromorphe sur  $U$  non constante sur  $U$ . Alors  $f$  est la restriction d'une transformation de Möbius directe si et seulement si sa dérivée schwarzienne est nulle.*

*Démonstration.* Le sens direct résulte du calcul qui précède la définition 1.23.

Pour le sens réciproque, on suppose  $U$  non vide et on pose  $x \in U \setminus \{\infty\}$  tel que  $f(x) \neq \infty$  et  $f'(x) \neq 0$ , ce qui est possible car  $f$  n'est pas constante. Alors d'après la proposition 1.22, il existe une unique transformation de Möbius directe  $\sigma$  telle que  $\sigma^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$  pour  $0 \leq k \leq 2$ . De plus, au voisinage de  $x$ ,  $f$  et  $\sigma$  vérifient l'équation différentielle du troisième ordre  $h''' = \frac{3h''^2}{2h'}$  d'inconnue  $h : f$  la vérifie par hypothèse,  $\sigma$  par le sens direct. Ainsi  $f$  et  $\sigma$  sont égales sur un voisinage de  $x$ , et par prolongement analytique, sur  $U$ .  $\square$

On peut relier la dérivée schwarzienne au birapport (voir [14], encadré IV.1).

**Proposition 1.26.** *Soit  $x \in \mathbb{C}$  et  $f$  une fonction méromorphe définie sur un voisinage de  $x$  et dont  $x$  n'est pas un point critique. Alors lorsque  $\epsilon \in \mathbb{C}^*$  tend vers 0, on a le développement limité suivant :*

$$[f(x), f(x+\epsilon), f(x+2\epsilon), f(x+3\epsilon)] = [x, x+\epsilon, x+2\epsilon, x+3\epsilon] - 2S f(x)\epsilon^2 + o(\epsilon^2).$$

*Démonstration.* Il suffit d'effectuer le calcul à partir de la formule explicite du birapport de  $a, b, c, d \in \mathbb{P}^1$  :

$$[a, b, c, d] = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)}.$$

$\square$

## 1.4.2 Structures projectives et dérivée schwarzienne

Considérons une surface de Riemann  $S$  munit de deux structures projectives  $P$  et  $Q$ . Pour les comparer localement, en un point  $x \in S$ , on peut considérer une carte  $(U, \phi) \in P$ , une carte  $(V, \psi) \in Q$  et considérer la dérivée schwarzienne de  $\phi \circ \psi^{-1}$  sur son ensemble de définition. Celle-ci sera nulle si et seulement si  $P$  et  $Q$  sont identiques sur la composante connexe de  $x$ .

On souhaiterait que la dérivée schwarzienne en un point ne dépende pas du choix des cartes. Ce n'est pas le cas : la dérivée schwarzienne ne se conserve pas nécessairement par composition par une transformation de Möbius directe. Cependant, elle a une invariance qui permet de la définir indépendamment des cartes, à condition de considérer son résultat non comme une fonction holomorphe, mais comme une différentielle quadratique holomorphe. Un calcul permettrait de le constater, mais il est plus éclairant de redéfinir la dérivée schwarzienne de manière intrinsèque sur une surface de Riemann quelconque et de constater la correspondance avec la première définition.

**Définition 1.27** (Dérivée schwarzienne, 2<sup>ème</sup> définition). *Soit  $S$  une surface de Riemann,  $f, h$  deux fonctions méromorphes sur  $S$ ,  $x \in S$  qui n'est un point critique ni de  $f$ , ni de  $h$ . Soit  $\sigma$  la transformation de Möbius directe donnée par la proposition 1.22 telle que  $f \circ h^{-1} - \sigma$  a un zéro d'ordre au moins 3 en  $h(x)$  ( $h^{-1}$  étant définie au voisinage de  $h(x)$  par théorème d'inversion locale). Ainsi  $f - \sigma \circ h$  a un zéro d'ordre au moins 3 en  $x$ . Par conséquent la fonction cubique  $\alpha := d^3(f - \sigma \circ h)(x) : T_x S \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{P}^1$  est bien définie. En composant par  $df(x)^{-1}$ , on obtient une fonction cubique  $\beta : T_x S \rightarrow T_x S$ . Comme  $T_x S$  est de*

dimension 1,  $(T_x^*S)^{\otimes 3} \otimes T_x S$  est canoniquement isomorphe à  $(T_x^*S)^{\otimes 2}$ . L'image de  $\beta$  par cet isomorphisme est la dérivée schwarzienne de  $f$  pour  $h$  en  $x$ , et est notée  $\{f, h\}(x)$ .

Cette définition à l'avantage d'être invariante par transformations de Möbius directes.

**Proposition 1.28.** *Soit  $\tau_1, \tau_2$  deux transformations de Möbius directes. Alors, avec les notations de la définition précédente,  $\{\tau_1 \circ f, \tau_2 \circ h\}(x) = \{f, h\}(x)$ .*

*Démonstration.* On reprend les notations  $\sigma, \alpha, \beta$  de la définition de  $\{f, h\}(x)$ , on utilise les notations  $\tilde{\sigma}, \tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  pour la définition de  $\{\tau_1 \circ f, \tau_2 \circ h\}(x)$ . On constate que  $\tilde{\sigma} := \tau_1 \circ \sigma \circ \tau_2^{-1}$ . Alors  $\tilde{\alpha} = d\tau_1(f(x)) \circ \alpha$ . Finalement  $\tilde{\beta} = \beta$ .  $\square$

**Proposition 1.29.** *Soit  $S$  une surface de Riemann,  $f, h$  deux fonctions méromorphes sur  $S$  sans point critique. Alors la dérivée schwarzienne  $\{f, h\}$  est une différentielle quadratique holomorphe. De plus, sur tout ouvert  $U \subset S$  sur lequel  $h$  est injective, on a  $\{f, h\} = (S(f \circ h^{-1}) \circ h) dh^{\otimes 2}$ .*

*Démonstration.* Par théorème d'inversion locale,  $S$  est recouvert par des ouvert sur lesquels  $h$  est injective : comme l'holomorphie est une propriété locale, le deuxième fait implique ainsi le premier.

Soit  $x \in U \subset S$  avec  $U$  un ouvert sur lequel  $h$  est injective et  $x$  tel que  $f(x), h(x) \neq \infty$ . On reprend les notations de la définition et on identifie  $T_{f(x)} \mathbb{P}^1$  et  $T_{h(x)} \mathbb{P}^1$  à  $\mathbb{C}$ . On définit l'isomorphisme  $\gamma := dh(x) : T_x S \rightarrow \mathbb{C}$  et on pose  $y := h(x)$ . Alors  $\alpha \circ \gamma^{-1}$  est de la forme  $z \mapsto \frac{az^3}{6}$  avec  $a = (f \circ h^{-1})'''(y) - \sigma'''(y)$ . Alors  $\gamma \circ \beta \circ \gamma^{-1}$  est de la forme  $z \mapsto \frac{bz^3}{6}$  avec  $b = f'(x)^{-1} h'(x) a$ . Ainsi  $(\gamma^{-1})^* \{f, h\}(x) = b dz(x)^{\otimes 2}$ , donc  $\{f, h\}(x) = b dh(x)^{\otimes 2}$ .

Il reste à déterminer  $b$ . Par définition de  $\sigma$  et le sens direct de la proposition 1.25, on a  $a = (f \circ h^{-1})'(y) S(f \circ h^{-1})(y)$ , et donc  $b = S(f \circ h^{-1})(y)$ .

Pour traiter le cas où  $f(x)$  ou  $h(x)$  est infini, on compose par l'inversion (qui est dans  $\mathcal{M}$ ) et on utilise la proposition 1.28 afin de se ramener au cas précédent au voisinage de  $x$ . Ainsi, sur un voisinage de  $x$ ,  $\{f, g\}$  est une différentielle quadratique holomorphe, et sur ce voisinage privée de  $x$ , elle est égale à  $(S(f \circ h^{-1}) \circ h) dh^{\otimes 2}$ . Par théorème du prolongement analytique, il y a aussi égalité en  $x$ .  $\square$

**Exemple 1.30.** *Sur un ouvert de  $\mathbb{C}$ , on a  $\{f, \text{id}\} = S f dz^{\otimes 2}$ .*

**Remarques 1.31.** *On peut déduire des deux propriétés précédentes des propriétés de la (première) dérivée schwarzienne  $S$ .*

1. Si  $f$  est une fonction méromorphe nulle part localement constantes sur un ouvert de  $\mathbb{P}^1$  et  $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{M}$ , alors :

$$S(\tau_1 \circ f \circ \tau_2^{-1}) = (S(f)/\tau_2'^2) \circ \tau_2^{-1}.$$

En effet, la proposition 1.28 donne  $\{\tau_1 \circ f, \tau_2\} = \{f, \text{id}\}$  et on applique la proposition 1.29 à chaque membre de l'égalité.

2. L'opérateur  $S$  est caractérisé par les deux axiomes suivant, pour  $f$  une fonction méromorphe nulle part localement constante sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{P}^1$  :

- (a) si  $\sigma \in \mathcal{M}$ ,  $S(\sigma \circ f) = S(f)$  ;  
(b) si  $x \in U \setminus \{\infty\}$ ,  $f(x) = 0$ ,  $f'(x) = 1$  et  $f''(x) = 0$ , alors  $S f(x) = f'''(x)$ .

**Proposition 1.32.** *Avec les mêmes notations que la proposition précédente,  $j$  une troisième fonction méromorphe sans point critique et  $\tau \in \mathcal{M}$  :*

1.  $\{f, \tau \circ f\} = 0$  ;
2. si  $S$  est connexe non vide et  $\{f, h\} = 0$ , il existe un unique  $\sigma \in \mathcal{M}$  tel que  $f = \sigma \circ h$  ;
3.  $\{f, j\} = \{f, h\} + \{h, j\}$ ,  $\{f, h\} = -\{h, f\}$  ;

*Démonstration.* 1. On constate que  $\{f, f\} = 0$  et on utilise la proposition 1.28.

2. Soit  $U$  un ouvert connexe non vide sur lequel  $h$  est injective. D'après les propositions 1.29 et 1.25, il existe  $\sigma_U \in \mathcal{M}$  telle que  $f|_U = \sigma_U \circ h|_U$ . De tels ouverts  $U$  recouvrent  $S$ . De plus, si  $V$  est un autre tel ouvert,  $\sigma_U$  et  $\sigma_V$  coïncident sur l'ouvert  $h(U \cap V)$ . Si  $U \cap V \neq \emptyset$ , on a donc  $\sigma_U = \sigma_V$ . Par connexité de  $S$ , tous les  $\sigma_U$  sont égaux, donc il existe  $\sigma \in \mathcal{M}$  tel que  $f = \sigma \circ h$ . Son unicité se déduit du fait que l'image de  $h$  est un ouvert non vide.
3. On reprend les notations de la définition 1.27, avec l'indice 1 (resp. 2) pour la définition de  $\{f, j\}$  (resp.  $\{f, h\}$ ). Alors :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= d^3(f - \sigma_1 \circ j)(x) \\ &= d^3(f - \sigma_2 \circ h)(x) + d^3(\sigma_2 \circ h - \sigma_1 \circ j)(x) \\ &= \alpha_2 + \alpha_3 \end{aligned}$$

avec l'indice 3 correspondant à la définition de  $\{\sigma_2 \circ h, \sigma_1 \circ j\}$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= df(x)^{-1} \circ \alpha_2 + df(x)^{-1} \circ \alpha_3 \\ &= \beta_2 + d(\sigma_2 \circ h)(x)^{-1} \circ \beta_3 \\ &= \beta_2 + \beta_3. \end{aligned}$$

Finalement  $\{f, j\} = \{f, h\} + \{\sigma_2 \circ h, \sigma_1 \circ j\}$  et on conclut avec la proposition 1.28.

La deuxième égalité se déduit de la première. □

**Remarque 1.33.** *On peut alors généraliser le point 1 de la remarque 1.31 : si  $f$  et  $h$  sont deux fonctions méromorphes nul part localement constantes sur des ouverts de  $\mathbb{P}^1$ , tel que l'image de  $h$  est incluse dans le domaine de  $f$ , alors :*

$$S(f \circ h) = (S(f) \circ h).h'^2 + S(h).$$

*En effet, il suffit d'appliquer la proposition 1.29 à chaque membre de l'égalité  $\{f, h^{-1}\} = \{f, \text{id}\} + \{\text{id}, h^{-1}\}$ .*

Conformément à notre intention initiale, la dérivée schwarzienne permet de comparer deux structures projectives.

**Définition 1.34** (Dérivée schwarzienne, 3<sup>ème</sup> définition). *Soit  $S$  une surface de Riemann,  $P, Q \in \mathcal{P}(S)$ . La dérivée schwarzienne de  $P$  pour  $Q$  est la différentielle quadratique holomorphe  $\{P, Q\}$  définie localement par  $\{\phi, \psi\}$  où  $\phi$  est une carte de  $P$  et  $\psi$  une carte de  $Q$  (la définition ne dépend pas du choix de la carte grâce à la proposition 1.28).*

**Exemples 1.35.** *Considérons des structures projectives définie sur  $\mathbb{C}^*$ .*

1. On a  $\{C, I\} = \frac{1}{2z^2} dz$ .
2. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $A_n$  la structure projective issue de  $I$  en appliquant la proposition 1.4 avec la fonction :

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \rightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & z^n. \end{array}$$

$$\text{Alors } \{A_n, I\} = \frac{1-n^2}{2z^2} dz.$$

3. On en déduit  $\{C, A_n\} = \frac{n^2}{2z^2}$ .
4. On définit de même  $B_n$  mais en transportant  $I$  dans l'autre sens, avec la proposition 1.5. On a  $\{B_n, I\} = \frac{1-n^{-2}}{2z^2} dz$ .

**Exemple 1.36.** *Soit  $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \Lambda = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}, S = \mathbb{C}/\Lambda$ . Soit  $C$  la structure projective canonique sur  $S$ ,  $c \in \mathbb{C}^*, P_c$  la structure canonique définie dans l'exemple 1.9. Alors  $\{P_c, C\} = -\frac{c^2}{2}$ .*

### 1.4.3 Le torseur des structures projectives

La dérivée schwarzienne permet de comparer des structures projective et munit leur ensemble d'une structure d'espace affine.

**Proposition 1.37.** *Soit  $S$  une surface de Riemann. Alors  $\mathcal{P}(S)$  muni de la dérivée schwarzienne (troisième définition) est un espace affine de direction  $\mathcal{Q}(S)$ .*

*Démonstration.* Le troisième point de la proposition 1.32 montre la relation de Chasles.

Soit  $P \in \mathcal{P}(S), q \in \mathcal{Q}(S)$ , il faut montrer qu'il existe une unique  $Q \in \mathcal{P}(S)$  telle que  $q = \{Q, P\}$ . On pose  $Q = \{(V, \psi) \text{ carte projective sur } S, \forall (U, \phi) \in P, \{\psi, \phi\} = q \text{ sur } U \cap V\}$ .

Montrons que les  $V$  pour  $(V, \psi) \in Q$  recouvrent  $S$ . Soit  $x \in S$ , soit  $(U, \phi) \in P$  avec  $U$  un voisinage ouvert simplement connexe de  $x$ . Soit alors  $a$  la fonction holomorphe sur  $\phi(U)$  telle que  $q = (a \circ \phi) d\phi^{\otimes 2}$ . Alors l'équation différentielle  $S(f) = a$  d'inconnue  $f$  admet une solution méromorphe (non unique). On pose  $\psi = f \circ \phi$ . Ainsi, sur  $U$ , on a  $\{\psi, \phi\} = q$ . Quitte à rétrécir  $U$ , on peut supposer  $\psi$  injective et donc que  $(U, \psi)$  est une carte projective. La proposition 1.28 assure  $(U, \psi) \in Q$ .

Montrons que  $Q$  est un atlas projectif. Soit  $(V_1, \psi_1)$  et  $(V_2, \psi_2)$  dans  $Q$ , soit  $W$  une composante connexe de  $V_1 \cap V_2$ . Soit  $(U, \phi) \in P$  telle que  $U \cap W \neq \emptyset$ . Alors sur  $W \cap U$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont solutions de l'équation  $\{\psi, \phi\} = q$  d'inconnue

$\psi$ . On applique alors les points 3 et 2 de la proposition 1.32 : il existe  $\sigma \in \mathcal{M}$  tel que  $\psi_2 = \sigma \circ \psi_1$ . Par connexité de  $W$ ,  $\sigma$  ne dépend pas de  $(U, \phi)$ . Donc  $Q$  est un atlas.

Il est clair que  $Q$  est une structure projective et qu'elle vérifie  $\{Q, P\} = q$ . Il reste à montrer l'unicité. Par définition de  $Q$ , une carte projective d'une solution de  $\{R, P\} = q$  d'inconnue  $R \in \mathcal{P}(S)$  est dans  $Q$ , donc  $R \subset Q$ , donc  $R = Q$ .  $\square$

**Remarque 1.38.** *L'étape cruciale de la démonstration précédente est l'utilisation du fait qu'une équation différentielle holomorphe admet localement une solution. Elle permet de passer de l'infinitésimal au local. Ainsi, c'est la proposition précédente que l'on utilisera de montrer que toute connexion projective (définition infinitésimale) est issue d'une structure projective (définition locale) au chapitre 2.*

Dans le cas d'une surface de Riemann compacte, l'espace affine  $\mathcal{P}(S)$  est de dimension finie.

**Proposition 1.39.** *Pour  $S$  une surface de Riemann connexe compacte de genre  $g \geq 2$ ,  $\mathcal{P}(S)$  est un  $\mathbb{C}$ -espace affine de dimension  $3g - 3$ .*

*Démonstration.* La dimension de  $\mathcal{Q}(S)$  est donnée par le théorème de Riemann-Roch, en utilisant le fait que le fibré tangent n'a pas de section globale non nulle car  $g \geq 2$ .  $\square$

On peut également expliciter l'ensemble des structures projectives dans le cas  $g = 1$ .

**Proposition 1.40.** *Soit  $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ,  $\Lambda = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ ,  $S = \mathbb{C}/\Lambda$ . Alors les structures projectives sur  $S$  sont indexées par  $d \in \mathbb{C}$  :*

- pour  $d = 0$ , on pose  $P_0$  la structure canonique ;
- pour  $d \neq 0$ , on considère la structure  $P_c$  de l'exemple 1.18 avec  $c$  une racine carrée de  $d$ .

*Démonstration.* Comme le fibré canonique de  $S$  est trivial, il en va de même du faisceau  $\mathcal{Q}$ . Comme  $S$  est compacte,  $\mathcal{Q}(S)$  est de dimension 1. On se réfère alors à l'exemple 1.36.  $\square$

Enfin, l'absence de section globale holomorphe non nulle du fibré canonique de  $\mathbb{P}^1$  montre à nouveau l'unicité de sa structure projective.

On peut constater que les structures de faisceau de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont compatibles.

**Proposition 1.41.** *Sur une surface de Riemann, le faisceau d'ensembles  $\mathcal{P}$  est un torseur sur le faisceau en groupes (additifs)  $\mathcal{Q}$ .*

## 1.5 Structure projective relative

On peut définir des structures projectives en famille. On considère  $T$  une variété analytique complexe, qui sert d'espace des paramètres. On considère une variété analytique complexe  $S$  et une submersion analytique propre  $p : S \rightarrow T$  dont les fibres sont de dimension 1. On appellera la donnée de deux telles variétés et d'un tel morphisme une *famille de surfaces de Riemann compactes*. Pour tout  $t \in T$ , on note  $S_t := p^{-1}(\{t\})$ , qui est une surface de Riemann compacte.

**Définition 1.42** (Carte, atlas, structure projective relative). *Avec les notations définies précédemment, une carte projective relative sur  $S$  est la donnée  $(U, \phi)$  d'un ouvert  $U$  de  $S$  et d'une fonction analytique  $\phi : U \rightarrow \mathbb{P}^1$  qui est injective sur les fibres.*

*Un atlas projectif relatif sur  $S$  est un ensemble de cartes projectives  $(U, \phi)$  sur  $S$  telles que :*

- les  $U$  recouvrent  $S$  ;
- pour  $(U_1, \phi_1)$  et  $(U_2, \phi_2)$  deux cartes de l'atlas, pour  $t \in T$  et pour  $W$  une composante connexe de  $\phi_1(U_1 \cap U_2 \cap S_t)$ ,  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$  définie sur  $W$  est la restriction d'une transformation de Möbius directe.

*Une structure projective relative sur  $S$  est un atlas projectif maximal pour l'inclusion. On note  $\mathcal{P}_T(S)$  l'ensemble des structures projectives relatives sur  $S$  ( $p$  est implicite dans la notation).*

**Remarques 1.43.** 1. *Une structure projective relative induit une structure projective sur chaque fibre. De plus, si  $\bullet$  est un point, la donnée d'une structure projective sur une surface de Riemann compacte  $S$  équivaut à la donnée d'une structure projective relative sur  $S \rightarrow \bullet$ .*

2. *On la notion de dérivée schwarzienne se généralise dans le cas relatif : une dérivée schwarzienne entre deux structures projectives relative est un élément de  $K_{S/T}^{\otimes 2}$ . De plus,  $\mathcal{P}_T(S)$  est un  $K_{S/T}^{\otimes 2}$ -espace affine.*

Dans le cas relatif, l'existence d'une structure projective n'est pas assurée : il y a des cas où une telle structure n'existe pas ([8], corollaire p.7). Cela contredit la discussion de [2], p.761. Il semble que dans ce dernier article l'erreur se situe dans le fait que le revêtement galoisien fini étale invoqué n'existerait pas toujours. Cependant, le raisonnement suivant est vrai, et donne une application de la structure d'espace affine de l'ensemble des structures projectives :

**Proposition 1.44.** *Soit  $p : S \rightarrow T$  une famille de surfaces de Riemann compactes. Soit  $r : R \rightarrow S$  un revêtement galoisien non ramifié avec un nombre fini de feuillettes. Alors  $\mathcal{P}_T(S)$  a un élément si et seulement si  $\mathcal{P}_T(R)$  a un élément.*

*Démonstration.* La preuve du sens direct est simplement une réécriture de la preuve de la proposition 1.4.

Pour le sens réciproque, on peut refaire la preuve de 1.5, mais il faut avant disposer d'un élément de  $\mathcal{P}_T(R)$  invariant par l'action des automorphismes de revêtement (l'action des  $T$ -automorphismes sur les structures projectives relatives se définissant par transport de structure).

Si on dispose de  $P \in \mathcal{P}_T(R)$ , et qu'on note  $G$  le groupe des automorphisme de revêtement de  $r$ , on peut considérer la famille finie  $(g.P)_{g \in G}$ . Comme  $\mathcal{P}_T(R)$  est un espace affine (de direction l'espace des différentielles quadratiques holomorphes relatives à  $T$  sur  $R$ ), l'isobarycentre  $I$  de cette famille est bien défini. Comme  $G$  agit de manière affine sur  $\mathcal{P}_T(R)$ , son action fixe  $I$ , qui peut alors passer au quotient.  $\square$

Un cas où il existe une structure projective relative est celui où  $T$  est une variété de Stein (on renvoie à [6] pour une démonstration). Ainsi, il existe toujours localement des structures projectives relatives.

Une structure projective relative peut être vue comme une famille de structure projective variant de manière holomorphe sur une famille de surfaces de Riemann. Cette interprétation est explicitée par la proposition qui suit.

Avec les notations de la définition, on note  $R_T(S)$  l'ensemble  $\{(t, P), t \in T, P \in \mathcal{P}(S_t)\}$ . On note  $p_T : R_T(S) \rightarrow T$  la projection sur la première coordonnée.

**Proposition 1.45.** *Il existe une unique structure de variété analytique sur  $R_T(S)$  telle que  $p_T$  est analytique, et l'application qui à  $P \in \mathcal{P}_T(S)$  associe la section  $t \mapsto P_t$  de  $p_T$  est une bijection de  $\mathcal{P}_T(S)$  vers l'ensemble des sections de  $p_T$ .*

*Démonstration.* Le résultat étant local en  $T$ , on peut supposer que  $T$  est une variété de Stein, donc qu'il existe  $P \in \mathcal{P}_T(S)$ . Grâce à la dérivée schwarzienne,  $P$  permet d'identifier  $\mathcal{P}_T(S)$  à  $K_{S/T}^{\otimes 2}$ . Ce ensemble est canoniquement en bijection avec l'ensemble des sections holomorphes du fibré :

$$q_T : \begin{array}{ccc} \{(t, \alpha), t \in T, \alpha \in K_{S_t}\} & \rightarrow & T \\ (t, \alpha) & \mapsto & t. \end{array}$$

Pour chaque  $t \in T$ ,  $P_t$  permet d'identifier  $K_{S_t}$  à  $\mathcal{P}(S_t)$ , et donc le fibré analytique donné par  $q_T$  à celui donné par  $p_T$ .  $\square$

**Exemples 1.46.** 1. *On considère  $S$  une surface de Riemann compacte. Alors  $\mathcal{P}(S)$  est un espace affine complexe de dimension finie, donc c'est une variété complexe. On considère alors la famille de surfaces de Riemann compactes  $p : S \times \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathcal{P}(S)$ . Alors  $R_T(S) = \mathcal{P}(S)^2$ ,  $p_T$  est la projection sur la première coordonnée. On considère la structure projective relative  $A$  définie par la section diagonale. Ainsi, pour tout  $P \in \mathcal{P}(S)$ , la fibre  $(S \times \mathcal{P}(S))_P$ , canoniquement isomorphe à  $S$ , est munie de la structure projective  $P$ .*

2. *On considère  $\mathbb{H} \times \mathbb{C}$ . On fait agir  $\mathbb{Z}^2$  :*

$$\rho : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{H} \times \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{H} \times \mathbb{C} \\ (n, m, \tau, z) & \mapsto & (\tau, z + n + m\tau). \end{array}$$

*La projection sur la première coordonnée passe au quotient et on obtient une famille de surfaces compactes  $(\mathbb{H} \times \mathbb{C})/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{H}$ . On définit alors une structure projective relative en passant au quotient sur chaque fibre la structure projective canonique de  $\mathbb{C}$ . Contrairement à l'exemple précédant, les fibres, qui sont connexes de genre 1, ne sont pas toutes isomorphes en tant que surfaces de Riemann.*

**Remarque 1.47.** *L'uniformisation fuchsienne (celle qui définit la structure projective canonique pour  $g \geq 2$ ) ne permet généralement pas de définir des structures projectives relatives, contrairement à l'uniformisation de Schottky.*



## Chapitre 2

# Définition infinitésimale

Dans cette section, on définit deux nouveaux  $\mathcal{Q}$ -torseur sur  $S$  et on montre qu'il sont isomorphes à  $\mathcal{P}$ . Ces toseurs donnent une définition infinitésimale d'une structure projective (là où la première est locale).

### Notations

Pour un schéma analytique  $T$ , on note  $\mathbb{P}_T^1$  le  $T$ -schéma analytique  $T \times \mathbb{P}^1$  avec pour morphisme structural la projection sur la première coordonnée. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $I_n$  le schéma analytique associé à l'algèbre  $\mathbb{C}[\epsilon]/(\epsilon^{n+1})$ .

## 2.1 Voisins infinitésimaux et fibré osculateur

On va mettre en place la notion de connexion projective, équivalente à celle de structure projective, exposée dans le livre [4]. Cette définition a l'avantage de faire contenir toute l'information d'une structure projective dans un seul morphisme de schémas analytiques. Il faut alors commencer par définir les espaces de départ et d'arrivée de ces morphismes : les voisinages infinitésimaux et le fibré osculateur. Ce dernier nécessite au préalable de développer la notion de droite projective osculatrice.

### 2.1.1 Droite projective osculatrice

On considère un schéma analytique  $S$ , et  $p : X \rightarrow S$  un fibré de fibre le schéma analytique  $I_2$ .

**Proposition 2.1.** *Soit  $u, v : X \rightarrow \mathbb{P}_S^1$  deux  $S$ -immersions fermées. Alors il existe un unique automorphisme de  $S$ -schémas analytiques  $\sigma$  de  $\mathbb{P}_S^1$  tel que  $v = \sigma \circ u$ .*

*Démonstration.* Soit  $U \subset S$  un ouvert trivialisant du fibré  $X \rightarrow S$ . Alors  $u$  et  $v$  se restreignent en deux  $U$ -immersions fermées de  $p^{-1}(U)$ , qui est  $S$ -isomorphe à  $U \times I_2$ , vers  $U \times \mathbb{P}^1$ . La proposition est alors simplement une reformulation dans le langage des schémas analytiques de la proposition 1.22, à ceci près que l'on procède relativement à  $U$ . On obtient ainsi un unique  $\sigma_U$  tel qu'en restriction à  $U$ ,  $v = \sigma_U \circ u$ .

Il reste à montrer que les solutions sur les ouverts  $U$  se recollent. Pour  $U$  et  $V$  deux ouverts trivialisants,  $\sigma_{U \cap V}$  est la restriction de  $\sigma_U$  et de  $\sigma_V$  par unicité dans la définition des  $\sigma$ . On peut ainsi recoller pour obtenir le  $\sigma$  souhaité.  $\square$

Cela permet de définir la droite osculatrice de  $X$ .

**Proposition 2.2.** *Avec les notations qui précèdent, il existe un fibré  $\mathbb{P}_{\text{pt}} \rightarrow S$  de fibre  $\mathbb{P}^1$  et une  $S$ -immersion fermée  $f : X \rightarrow \mathbb{P}_{\text{pt}}$ . De plus, si  $h : X \rightarrow \mathbb{P}'_{\text{pt}}$  est un autre tel couple, il existe un unique  $S$ -isomorphisme  $\sigma : \mathbb{P}_{\text{pt}} \rightarrow \mathbb{P}'_{\text{pt}}$  tel que  $h = \sigma \circ f$ .*

*Démonstration.* Soit  $U \subset S$  un ouvert trivialisant du fibré  $p : X \rightarrow S$ ,  $X_U$  l'image réciproque de  $U$  par  $p$ . On pose  $P_U := \mathbb{P}_U^1$ ,  $q_U : P_U \rightarrow U$  la projection canonique et  $f_U : X_U \rightarrow P_U$  une immersion fermée. Soit  $V$  un autre ouvert trivialisant.

Alors sur  $p^{-1}(U \cap V)$ , on a une immersion fermée  $f_U$  à valeur dans  $\mathbb{P}_{UV}^1 := q_U^{-1}(U \cap V)$  et une immersion fermée  $f_V$  à valeur dans  $\mathbb{P}_{VU}^1 := q_V^{-1}(U \cap V)$ . D'après la proposition 2.1, il existe un unique  $S$ -isomorphisme  $\rho_{UV} : \mathbb{P}_{UV}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{VU}^1$  tel que  $f_V = \rho_{UV} \circ f_U$  sur  $p^{-1}(U \cap V)$ .

Par unicité de la proposition 2.1, on constate que les ouverts  $\mathbb{P}_{UV}^1$  et les isomorphismes  $\rho_{UV}$  forment des données de recollement. Ainsi on peut recoller les  $\mathbb{P}_{UV}^1$  en un  $\mathbb{P}_{\text{pt}}^1$  et les  $f_U$  en une immersion fermée  $f$ .

Soit  $h : X \rightarrow \mathbb{P}'_{\text{pt}}$  un autre couple avec les mêmes propriétés,  $r : \mathbb{P}'_{\text{pt}} \rightarrow S$  la projection canonique. On considère le faisceau sur  $S$  dont les sections sur un ouvert  $U$  est l'ensemble des  $S$ -isomorphismes  $\sigma$  de  $q^{-1}(U)$  vers  $r^{-1}(U)$  tels que  $h = \sigma \circ f$  sur  $p^{-1}(U)$ . D'après la proposition 2.1, l'ensemble des sections sur un ouvert trivialisant de  $\mathbb{P}_{\text{pt}}$  et  $\mathbb{P}'_{\text{pt}}$  est un singleton. Ces ouverts forment une base de la topologie de  $S$ , qui a donc une unique section globale.  $\square$

**Définition 2.3** (Droite projective osculatrice). *Dans la proposition précédente,  $\mathbb{P}_{\text{pt}}$  est la droite projective osculatrice à  $X$ .*

On considère  $S$  une surface de Riemann. On considère alors le morphisme diagonal  $\Delta : S \rightarrow S^2$  et les deux projections  $p_1, p_2 : S^2 \rightarrow S$ . Alors les fonctions analytiques qui s'annulent sur  $\Delta(S)$  forment un faisceau d'idéaux quasi-cohérent  $\mathcal{I}$ .

### 2.1.2 Voisinage infinitésimaux

**Définition 2.4** (Voisinage infinitésimal). *Avec les notations précédentes, pour  $n \in \mathbb{N}$ , le  $n$ -ième voisinage infinitésimal de  $S$ , noté  $S_n$ , est le sous-schéma analytique fermé de  $S^2$  défini par le faisceau d'idéaux cohérents  $\mathcal{I}^{n+1}$ .*

**Remarques 2.5.** 1. *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n$  est un  $S$ -schéma analytique, avec pour morphisme structural, que l'on notera  $s_n$ , la composée de  $p_1$  et de l'inclusion  $S_n \subset S^2$ .*

2. *Le morphisme  $s_n$  a une section canonique, que l'on notera  $\delta_n$ , donnée par la corestriction de  $\Delta$ .*

3. *Le morphisme structural  $s_n$  et la section canonique  $\delta_n$  sont des bijections réciproques (mais pas des isomorphismes).*

4. *Si  $m \geq n$ , on a par définition une immersion fermée bijective  $j_{nm} : S_n \rightarrow S_m$ . Alors  $s_n = s_m \circ j_{nm}$  et  $\delta_m = j_{nm} \circ \delta_n$ .*

**Remarque 2.6.** Si  $n \in \mathbb{N}$  et  $T \subset S$  est un ouvert, alors  $T_n$  est un ouvert de  $S_n$ . L'inclusion est compatible avec les morphismes  $s_n, \delta_n$  et  $j_{nm}$  (pour  $m \geq n$ ).

**Remarque 2.7.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $G$  un groupe agissant proprement discontinuement sur  $S$ . On considère alors l'action diagonale sur  $S^2$ , qui se restreint en une action sur  $S_n$ . L'inclusion de  $S_n$  dans  $S^2$  donne en passant au quotient une immersion fermée de  $S_n/G$  dans  $S^2/G$ . On la compose alors le passage au quotient  $S^2/G \rightarrow S^2/G^2 = (S/G)^2$  pour obtenir un isomorphisme de  $S_n/G$  vers  $(S/G)_n$ . Celui-ci est compatible avec les morphismes  $s_n, \delta_n$  et  $j_{nm}$  (pour  $m \geq n$ ).

**Proposition 2.8.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n$  est un fibré de fibre  $I_n$ .

*Démonstration.* L'énoncé est local. Soit  $n \in \mathbb{N}^*, x \in S$ . Alors  $x$  a un voisinage ouvert  $U$  isomorphe à  $\mathbb{D}$ , l'isomorphisme envoyant  $x$  sur  $0$  : on peut donc considérer le cas  $S = \mathbb{D}, x = 0$ . Alors  $p_1$  et  $p_2$  sont des fonction analytiques sur  $\mathbb{D}^2$ , et  $\Gamma(\mathbb{D}^2, \mathcal{I})$  est l'idéal engendré par  $p_1 - p_2$ . Ainsi  $\Gamma(\mathbb{D}^2, \mathcal{I}^{n+1})$  est engendré par  $(p_1 - p_2)^{n+1}$ . Soit  $F$  la fibre de  $S_n$  en  $0$ . C'est l'intersection de  $\mathbb{D} \times \{0\}$  et  $S_n$ , un schéma analytique d'ensemble sous-jacent un singleton. Comme sur  $F$ ,  $p_1 = 0$  d'une part et  $(p_1 - p_2)^{n+1} = 0$  d'autre part, l'algèbre  $A$  de ses fonctions analytiques est isomorphe à celle de  $I_{n+1}$  via l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} \Pi : \mathbb{C}[\epsilon]/(\epsilon^{n+1}) &\rightarrow A \\ \epsilon &\mapsto p_2. \end{aligned}$$

□

**Exemple 2.9.** Le  $I_1$ -fibré  $(\mathbb{P}^1)_1$  n'est pas trivial. En effet, le sous-faisceau de  $\mathcal{O}_{(\mathbb{P}^1)_1}$  des sections nulles à l'ordre 0 est isomorphe à  $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ , donc au faisceau canonique de  $\mathbb{P}^1$ , qui n'est pas trivial. Par conséquent, aucun des fibrés  $(\mathbb{P}^1)_n$  n'est trivial pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Exemple 2.10.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{C}_n$  est le  $I_n$ -fibré trivial. On peut le constater en restreignant l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} h : \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x, y - x) \end{aligned}$$

à  $\mathbb{C}_n$ . D'après la remarque 2.6, le fibré  $U_n$  est aussi trivial pour tout ouvert  $U \subset \mathbb{C}$ , et donc pour tout ouvert de  $\mathbb{P}^1$  distinct de  $\mathbb{P}^1$  (en particulier pour  $\mathbb{H}$ ).

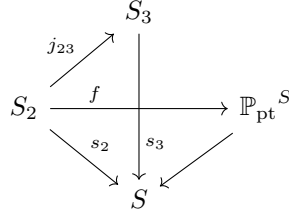
**Définition 2.11** (Ouvert trivialisant). On appellera ouvert trivialisant de  $S$  un ouvert de  $S$  qui est isomorphe à un ouvert de  $\mathbb{P}^1$  distinct de  $\mathbb{P}^1$  (et qui trivialise donc le fibré  $S_n \rightarrow S$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ).

**Remarque 2.12.** Les ouverts trivialisant sont une base de la topologie de  $S$ . De plus un ouvert inclus dans un ouvert trivialisant est trivialisant.

### 2.1.3 Fibré osculateur

**Définition 2.13** (Fibré osculateur). On appelle fibré osculateur à  $S$  la droite projective osculatrice à  $S_2$ . On la note  $\mathbb{P}_{\text{pt}}^S$ .

Remarquons que le diagramme suivant commute.



**Exemple 2.14.** Dans le cas de  $\mathbb{P}^1$ , le fibré osculateur est trivial, l'application  $f : (\mathbb{P}^1)_2 \rightarrow (\mathbb{P}^1)^2$  est simplement l'inclusion. Le fibré osculateur est également trivial pour un ouvert  $U$  de  $\mathbb{P}^1$  (en particulier pour  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{H}$ ). Alors  $U_2$  est un ouvert de  $S_2$ , et  $f : U_2 \rightarrow U \times \mathbb{P}^1$  est la restriction de l'application précédente.

**Exemple 2.15.** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{P}^1$  distinct de  $\mathbb{P}^1$ . On peut écrire différemment la fonction  $f$ . On a vu que  $U_2$  s'identifie à  $U \times I_2$ . Décrivons une  $U$ -immersion fermée de  $U \times I_2$  dans  $U \times \mathbb{P}^1$ . On a une immersion fermée de  $I_2$  dans  $\mathbb{C}$ , d'image  $0$ , telle que le tiré en arrière de l'identité est  $\epsilon$ . En composant par l'inclusion  $\mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1$ , on obtient une immersion fermée de  $I_2$  dans  $\mathbb{P}^1$ , par changement de base, on en déduit une immersion fermée de  $U \times I_2$  dans  $U \times \mathbb{P}^1$ . On peut donc définir  $\mathbb{P}_{\text{pt}}^U = \mathbb{P}_U^1$  et  $f$  comme cette immersion fermée.

**Exemple 2.16.** Considérons le cas d'une surface connexe compacte de genre 1, avec les notations habituelles. Montrons que le fibré osculateur est triviale.

On note  $D$  le deuxième voisinage infinitésimal de  $\mathbb{C} \times \{0\}$  dans  $\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$ . Considérons l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$  par addition sur la première coordonnée. Alors l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$  se restreint en une action sur  $D$ . Le quotient  $D/\Gamma$  s'identifie alors au deuxième voisinage infinitésimal  $E$  de  $\mathbb{C}/\Gamma \times \{0\}$  dans  $\mathbb{C}/\Gamma \times \mathbb{P}^1$ . Cette immersion fermée  $E \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma \times \mathbb{P}^1$  est la fonction  $f$ . Il reste à montrer que  $E$  est isomorphe à  $(\mathbb{C}/\Gamma)_2$ .

On considère l'isomorphisme de l'exemple 2.10 :

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \rightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x, y - x) \end{array}$$

Alors  $h$  passe au quotient en un isomorphisme  $\tilde{h}$  entre le quotient  $F$  de  $\mathbb{C}^2$  par l'action diagonale de  $\Gamma$  et le quotient de  $\mathbb{C}^2$  par l'action de  $\Gamma$  sur la première coordonnée. Ce dernier quotient s'inclut dans  $\mathbb{C}/\Gamma \times \mathbb{P}^1$ . On conclut avec la remarque 2.7.

**Exemple 2.17.** De manière plus générale, on peut décrire  $\mathbb{P}_{\text{pt}}^S$  si on dispose d'une uniformisation de  $S$  (canonique, de Schottky ou de Bers). Considérons un ouvert  $U \subset \mathbb{C}$  et un groupe  $G \subset \mathcal{M}$  agissant proprement discontinuement sur  $U$ , tels que l'on puisse identifier  $U/G$  et  $S$ . Alors  $\mathbb{P}_{\text{pt}}^S$  est le quotient de  $U \times \mathbb{P}^1$  par l'action :

$$\rho : \begin{array}{ccc} G \times U \times \mathbb{P}^1 & \rightarrow & U \times \mathbb{P}^1 \\ (\gamma, x, y) & \mapsto & (\gamma.x, \gamma.y). \end{array}$$

## 2.2 Connexions projectives

Maintenant que les bons espaces ont été mis en place, on peut définir les connexions projectives.

**Définition 2.18** (Connexion projective). *Une connexion projective sur  $S$  est un morphisme de  $S$ -schémas analytiques  $\gamma : S_3 \rightarrow \mathbb{P}_{\text{pt}}^S$  tel que  $f = \gamma \circ j_{23}$ .*

**Remarque 2.19.** *Autrement dit, une connexion projective est un morphisme de schémas analytiques  $\gamma : S_3 \rightarrow \mathbb{P}_{\text{pt}}^S$  tel que le diagramme suivant commute.*

$$\begin{array}{ccc}
 & S_3 & \\
 j_{23} \nearrow & & \searrow \gamma \\
 S_2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}_{\text{pt}}^S \\
 s_2 \searrow & & \nearrow s_3 \\
 & S & 
 \end{array}$$

Les définitions des différents objets sont locales sur  $S$ . On peut regarder les connexions projectives sur les ouverts de  $S$  et constater qu'elles ont une structure de faisceau. On le notera  $\mathcal{H}$ . Ce faisceau a en fait une structure de  $\mathcal{Q}$ -torseur, que l'on va décrire. On va donner à  $\mathcal{H}(S)$  une structure de  $\mathcal{Q}(S)$ -espace affine (ce qui est suffisant car tout ouvert de  $S$  est une surface de Riemann).

Dans le diagramme commutatif qui précède,  $S$ ,  $S_2$  et  $S_3$  ont le même ensemble sous-jacent. Le morphisme structural de  $\mathbb{P}_{\text{pt}}^S$  a une section canonique  $e$  égale à  $f \circ \delta_2$  et à  $\gamma \circ \delta_3$ . Ainsi, la donnée de  $\gamma$  équivaut à la donnée d'un morphisme de  $\mathcal{O}_S$ -algèbres  $a : e^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\text{pt}}^S} \rightarrow \mathcal{O}_{S_3}$  tel que  $f^* = j_{23}^* \circ a$ .

On considère  $a$  et  $b$  deux tels morphismes de  $\mathcal{O}_S$ -algèbres. On considère leur différence. Considérons  $U$  un ouvert trivialisant, posons  $A$  l'algèbre  $\Gamma(U, \mathcal{O}_S)$ . Sur  $U$  on peut identifier :

- $\Gamma(U, e^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\text{pt}}^S})$  à la  $A$ -algèbre des germes de fonctions holomorphe au voisinage de  $U \times \{0\}$  dans  $U \times \mathbb{C}$ , on notera  $z$  la germe de la projection sur la deuxième coordonnées ;
- $\Gamma(U, \mathcal{O}_{S_3})$  à  $A[\alpha]/(\alpha^4)$  ;
- $\Gamma(U, \mathcal{O}_{S_2})$  à  $A[\epsilon]/(\epsilon^3)$  ;
- $f^*$  à  $z \mapsto \epsilon$  ;
- $j_{23}^*$  à  $\alpha \mapsto \epsilon$ .

Ainsi, l'image de  $a_U - b_U$  est dans le  $A$ -module libre engendrée par  $\alpha^3$ . On constate qu'un morphisme de  $A$ -modules de  $\Gamma(U, e^{-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\text{pt}}^S})$  vers  $\langle \alpha^3 \rangle$  est la différence de deux morphismes de  $A$ -algèbres à image dans  $A[\alpha]/(\alpha^4)$  si et seulement si c'est une dérivation.

Par conséquent, la différence des deux morphismes  $a$  et  $b$  se factorise par le faisceau  $e^* \mathcal{K}_{\mathbb{P}_{\text{pt}}^S/S}$ . Ainsi, l'ensemble des connexions projectives est un espace affine de direction l'espace des morphismes de faisceaux de  $\mathcal{O}_S$ -modules de  $e^* \mathcal{K}_{\mathbb{P}_{\text{pt}}^S/S}$  vers  $\mathcal{I}^3/\mathcal{I}^4$ . Montrons que cet espace est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{Q}(S)$ .

D'une part,  $e^{-1} \mathcal{K}_{\mathbb{P}_{\text{pt}}^S/S}$  est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{K}_S$ . En effet,  $f$  induit un isomorphisme canonique entre  $e^{-1} \mathcal{K}_{\mathbb{P}_{\text{pt}}^S/S}$  et  $\mathcal{K}_{S_2/S}$ . Or le morphisme

de  $\mathcal{O}_S$ -modules suivant est un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \omega : \mathcal{I} / \mathcal{I}^2 &\rightarrow \mathbb{K}_{S_2/S} \\ h &\mapsto dh. \end{aligned}$$

Ainsi  $e^* \mathbb{K}_{\mathbb{P}_{\text{pt}}^S/S}$  et  $\mathbb{K}_S$  sont canoniquement isomorphes.

D'autre part, on a  $\mathcal{I}^3 / \mathcal{I}^4 \simeq (\mathcal{I} / \mathcal{I}^2)^{\otimes 3} = \mathbb{K}_S^{\otimes 3}$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(e^* \mathbb{K}_{\mathbb{P}_{\text{pt}}^S/S}, \mathcal{I}^3 / \mathcal{I}^4) &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathbb{K}_S, \mathbb{K}_S^{\otimes 3}) \\ &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S, \mathbb{K}_S^{\otimes 2}) \\ &\simeq \mathcal{Q}(S). \end{aligned}$$

Alors, pour  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux connexions projectives sur  $S$ , on notera  $\{\gamma_1, \gamma_2\}$  la différentielle quadratique holomorphe définie par  $\gamma_1^* - \gamma_2^*$  via l'isomorphisme précédent.

On peut à présent constater que les connexions projectives sont en correspondance avec les structures projectives.

**Théorème 2.20.** *Les  $\mathcal{Q}$ -torseurs  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{H}$  sont canoniquement isomorphes.*

*Démonstration.* Définissons un isomorphisme de  $\mathcal{Q}$ -torseurs  $k : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{H}$ . Il suffit de le définir localement : on décrit l'isomorphisme  $k_U : \Gamma(U, \mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{H})$  pour tout ouvert trivialisant connexe non vide  $U$ .

Soit  $P \in \mathcal{P}(S)$ . On doit décrire un morphisme  $\gamma$  remplissant les conditions de la définition 2.18. Soit  $h : U \rightarrow \mathbb{P}^1$  une application développante. Alors l'application  $(\text{id}, h) : U^2 \rightarrow U \times \mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{P}_{\text{pt}}^U$  ( $U$  étant trivialisant) se restreint à  $U_3$  en une application  $\gamma_0$ . Il est clair que c'est un morphisme de  $U$ -schémas analytiques. D'après la proposition 2.1, on peut composer  $\gamma_0$  par un automorphisme de  $U$ -schéma analytique de  $\mathbb{P}_{\text{pt}}^U$  pour obtenir  $\gamma$  tel que  $\gamma \circ j_{23} = f$ . On pose  $k_U(P) := \gamma$ .

On a un morphisme de faisceaux  $k$ . Montrons que pour tout ouvert  $U$ ,  $k_U$  est un morphisme d'espaces affines, de partie linéaire l'identité. On pourra en déduire que  $k$  est un isomorphisme de  $\mathcal{Q}$ -torseurs.

Soit  $P, Q \in \mathcal{P}(U)$ . On pose  $\gamma_P := k_U(P)$  et  $\gamma_Q := k_U(Q)$ . On pose  $x \in S$ , montrons qu'en  $x$  on a  $\{P, Q\} = \{\gamma_P, \gamma_Q\}$ . Soit  $(U, \phi) \in P$  et  $(U, \psi) \in Q$ . Quitte à composer par des transformations de Möbius directes, on peut supposer  $\phi(x) = \psi(x) = 0$ , et  $\phi$  et  $\psi$  égale jusqu'à l'ordre 2 en  $x$ .

Soit alors  $h$  une fonction analytique définie sur un voisinage de  $U \times \{0\}$  dans  $\mathbb{P}_{\text{pt}}^U$ . On considère  $h \circ \phi - h \circ \psi$ . Comme  $\phi$  et  $\psi$  sont égaux en  $x$  jusqu'à l'ordre 2, il en va de même de  $h \circ \phi$  et  $h \circ \psi$ , donc  $h \circ \phi - h \circ \psi$  est nulle jusqu'à l'ordre 2 en  $x$ . Alors  $d^3(h \circ \phi - h \circ \psi)(x) = dh(0) \circ d\phi(x) \circ d^3(\text{id} - \phi^{-1} \circ \psi)(x)$ .

Or, le morphisme :

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{K}_S(x) &\rightarrow \mathbb{K}_S(x)^{\otimes 3} \\ \mu &\mapsto \mu \circ d^3(\text{id} - \phi^{-1} \circ \psi) \end{aligned}$$

est par définition de la dérivée schwarzienne égal à  $\mu \mapsto \mu \otimes \{\phi, \psi\}$ . Ainsi  $\{\gamma_P, \gamma_Q\} = \{P, Q\}$ .  $\square$

**Exemple 2.21.** *L'unique structure projective sur  $\mathbb{P}^1$  est donnée par l'inclusion  $(\mathbb{P}^1)_3 \subset (\mathbb{P}^1)^2$ .*

**Exemple 2.22.** *Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{P}^1$  distinct de  $\mathbb{P}^1$ . On identifie  $U_3$  à  $U \times I_3$ . Considérons une structure projective  $P$  sur  $U$ . En notant  $Q$  la structure projective donnée par l'inclusion, la dérivée schwarziennne (troisième définition)  $\{P, Q\}$  s'écrit  $s(dz)^{\otimes 2}$  avec  $s$  une fonction holomorphe sur  $U$ . On considère alors la  $S$ -immersion de  $U \times I_3$  dans  $U \times \mathbb{P}^1$  d'image  $U \times \{0\}$ , telle que le tiré en arrière de la projection  $U \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est  $1 \otimes \alpha + s \otimes \frac{\alpha^3}{6}$ . Cette immersion est la connexion projective associée à  $P$ .*

**Exemple 2.23.** *Dans le cas d'une surface de genre 1  $S = \mathbb{C}/\Gamma$ , on a vu que  $S_2$  est  $S \times I_2$ , de même  $S_3$  est  $S \times I_3$ , et  $\mathbb{P}_{\text{pt}}^S$  est  $S \times \mathbb{P}^1$ . On définit de la même manière que dans l'exemple précédent une immersion fermée de  $S \times I_2$  dans  $S \times \mathbb{P}^1$ .*

*Considérons une structure projective  $P$  sur  $S$ . En notant  $C$  la structure projective canonique, la dérivée schwarziennne  $\{P, C\}$  est  $s(dz)^{\otimes 2}$  avec  $s$  une constante. On considère l'immersion de  $I_3$  dans  $\mathbb{C}$  d'image  $0$  telle que le tiré en arrière de l'identité est  $\alpha + \frac{s\alpha^3}{6}$ . En composant par l'inclusion dans  $\mathbb{P}^1$  et en changeant de base, on obtient la connexion projective associée à  $P$ .*

## 2.3 Définition par le faisceau des jets

On donne ici une description infinitésimale des structures projectives alternatives à la précédente. Elle est issue de l'article [2].

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $J^n$  le faisceau des jets d'ordre  $n$  sur  $S$  : il est localement libre d'ordre  $n+1$ . De plus, pour  $m \geq n$ , on a un morphisme surjectif de  $\mathcal{O}_S$ -modules  $J^m \rightarrow J^n$ .

On pose  $J_0^n$  le noyau de  $J^n \rightarrow J^0$ . Le morphisme  $J^m \rightarrow J^n$  se restreint alors en un morphisme surjectif  $J_0^m \rightarrow J_0^n$ . Posons  $\mathcal{M}_0$  le stabilisateur de  $0$  dans  $\mathcal{M}$ . On considère le faisceau en groupe  $\mathcal{N}_0$  des sections du fibré trivial  $S \times \mathcal{M}_0 \rightarrow S$ . Alors  $\mathcal{N}_0$  agit sur  $J_0^n$ , par composition.

On pose alors  $\mathcal{K}$  le sous-faisceau de  $J_0^3$  dont les sections sont celles dont l'image dans  $J_0^1$  ne s'annule nul part. Ce sous-faisceau est stable par l'action de  $\mathcal{N}_0$ . On note  $\mathcal{J}$  le faisceau quotient.

**Proposition 2.24.** *Les faisceaux  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{J}$  sont isomorphes.*

*Démonstration.* On décrit un isomorphisme de faisceau  $\Pi$  de  $\mathcal{J}$  vers  $\mathcal{H}$ . On le définit tout d'abord en se restreignant à un ouvert trivialisant  $U$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  le faisceau  $J^n$  est isomorphe au faisceau  $\mathcal{O}_{S^2}/\mathcal{I}^{n+1}$  (en identifiant le support  $\Delta$  à  $S$ ), donc  $J_0^3$  est isomorphe à  $\mathcal{I}/\mathcal{I}^4$ . Ainsi,  $J_0^3$  est en bijection avec le faisceau dont les sections sur un ouvert  $V \subset U$  est l'ensemble des morphismes de  $V$ -schémas analytiques de  $V_3$  vers  $V \times \mathbb{C}$  d'image  $V \times \{0\}$ . Donc  $\mathcal{K}$  est isomorphe au faisceau dont les sections sur  $V$  est l'ensemble des morphismes de  $V$ -schémas analytiques  $V_3 \rightarrow V \times \mathbb{C}$  d'image  $V \times \{0\}$  qui induisent une immersion  $V_2 \rightarrow V \times \mathbb{C}$ . Dans cette dernière définition, on peut bien sûr remplacer  $V \times \mathbb{C}$  par  $\mathbb{P}_V^1$ , on note alors  $A$  ce faisceau canoniquement isomorphe à  $\mathcal{K}$ .

On peut alors faire agir  $\mathcal{N}_0$  sur  $A$ . Comme  $U$  est trivialisant, on peut fixer une identification de  $\mathbb{P}_U^1$  et  $\mathbb{P}_{\text{pt}}^U$  (et donc de  $\mathbb{P}_V^1$  et  $\mathbb{P}_{\text{pt}}^V$  pour tout ouvert  $V \subset U$ ), et chaque section de  $A$  sur un ouvert  $V$  a dans son orbite un unique représentant qui induit le morphisme  $V \rightarrow \mathbb{P}_{\text{pt}}^V$  de la définition de  $\mathbb{P}_{\text{pt}}$ . De cette manière, le faisceau  $\mathcal{J}$  est isomorphe à  $\mathcal{H}$ .

La définition de  $\mathbb{P}_{\text{pt}}^S$  permet alors de recoller les isomorphismes définis en restriction aux ouverts trivialisant.  $\square$

On peut transporter via cet isomorphisme la structure de  $\mathcal{Q}$ -torseur de  $\mathcal{H}$  vers  $\mathcal{J}$ . Soit  $f, h$  de sections de  $\mathcal{J}$  définies sur un voisinage d'un point  $x \in S$ . On considère alors  $\tilde{f}$  et  $\tilde{h}$  deux sections de  $\mathcal{K}$  définies au voisinage de  $x$ . On peut les choisir de manière à ce que les images de  $\tilde{f}(x)$  et  $\tilde{h}(x)$  soient égales dans  $J^2$ . On a alors deux fonctions holomorphes  $\tilde{f}$  et  $\tilde{h}$  définies au voisinage de  $x$  et qui induisent en  $x$   $\tilde{f}(x)$  et  $\tilde{h}(x)$ .

D'autre part,  $\Pi(f)$  et  $\Pi(h)$  induisent chacun un morphisme entre les fibres au dessus de  $x$  des  $S$ -schémas analytiques  $S_3$  et  $\mathbb{P}_{\text{pt}}^S$ , c'est à dire entre le troisième voisinage infinitésimal de  $x$  dans  $S$  et celui de  $0$  dans  $\mathbb{C}$ . Ces deux morphismes sont simplement les restrictions de  $\tilde{f}$  et  $\tilde{h}$ .

Suivons à présent la définition de  $\{\Pi(f), \Pi(h)\}$ . L'identification de  $e^{-1}K_{\mathbb{P}_{\text{pt}}^S/S}$  et  $K_S$  permet ici d'identifier l'espace cotangent à  $\mathbb{C}$  en  $0$  à l'espace cotangent à  $S$  en  $x$ , en envoyant l'identité de  $\mathbb{C}$  sur  $d\tilde{f}$  (qui est égal à  $d\tilde{h}$ ). Le morphisme de  $K_{x/S}$  vers  $K_{x/S}^{\otimes 3}$  qui permet de définir  $\{\Pi(f), \Pi(h)\}(x)$  associe alors  $d^3(\tilde{h} - \tilde{f})$  à  $d\tilde{f}$ . Il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $d^3(\tilde{h} - \tilde{f}) = \lambda(d\tilde{f})^{\otimes 3}$ . Alors par définition  $\{\Pi(f), \Pi(h)\} = \lambda(d\tilde{f})^{\otimes 2}$ .

On peut ainsi définir  $\{f, h\}$  comme  $\lambda(d\tilde{f})^{\otimes 2}$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\tilde{h} - \tilde{f} = \lambda\tilde{f}^3$ . On peut vérifier que cette définition ne dépend pas du choix de  $\tilde{f}$  et  $\tilde{h}$ . On a ainsi défini la structure de  $\mathcal{Q}$ -torseur sur  $\mathcal{J}$  qui le rend isomorphe à  $\mathcal{H}$ .

**Exemple 2.25.** *Sur un ouvert  $U$  trivialisant  $s_3$ , une connexion projective s'écrit  $U \times I_3 \rightarrow U \times \mathbb{P}^1$  avec pour image  $U \times \{0\}$ , ce qui décrit directement une section de  $\mathcal{K}$  sur  $U$  dont on prend l'image dans  $\mathcal{J}$ .*

**Remarque 2.26.** *Les deux définitions de structure projective de ce chapitre s'adaptent sans soucis au cas relatif. Dans le cas la première définition, il faut remplacer les schémas analytiques  $I_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) par les  $T$ -schémas analytiques  $T \times I_n$ , et la droite projective  $\mathbb{P}^1$  par le  $S$ -espace analytique  $T \times \mathbb{P}^1$ .*



## Chapitre 3

# Caractérisation par les trivialisations d'un fibré

Dans ce chapitre, qui se base sur [2], on décrit un nouveau  $\mathcal{Q}$ -torseur, qui se révélera lui aussi être canoniquement isomorphe à  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{H}$ . On pose  $S$  une surface connexe compacte de genre  $g$ .

### 3.1 Définition du faisceau $L$

On pose  $p_1$  et  $p_2$  les deux projections de  $S^2$  vers  $S$ ,  $\delta : S \rightarrow S^2$  le morphisme diagonal,  $\Delta$  le diviseur diagonal. On définit  $L := \mathbb{K}_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}(2\Delta)$  (avec  $\mathcal{O}(2\Delta)$  le faisceau inversible associé au diviseur de Weil  $2\Delta$ ). Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $\mathcal{O}_{S^2}$ -module  $M$ , on note  $M|_{n\Delta}$  la restriction de  $M$  au diviseur  $n\Delta$ .

**Proposition 3.1.** *Le faisceau  $L$  a une trivialisatation canonique sur  $\Delta$ .*

*Démonstration.* On a  $\mathbb{K}_{S^2} = p_1^* \mathbb{K}_S \otimes p_2^* \mathbb{K}_S$ . Par conséquent, si on identifie  $S$  et  $\Delta$  via  $\delta$ ,  $\mathbb{K}_{S^2}|_{\Delta} = \delta^* p_1^* \mathbb{K}_S \otimes \delta^* p_2^* \mathbb{K}_S = \mathbb{K}_S^{\otimes 2}$ . D'autre part, par formule d'adjonction, on a  $\mathbb{K}_{S^2}|_{\Delta} \otimes \mathcal{O}(\Delta)|_{\Delta} = \mathbb{K}_S$ . Ainsi  $\mathcal{O}(\Delta)|_{\Delta} = \mathbb{K}_S^{-1}$ .

Par définition  $L = \mathbb{K}_S \otimes \mathcal{O}(2\Delta)$ , donc  $L|_{\Delta} = \mathbb{K}_S^{\otimes 2} \otimes (\mathbb{K}_S^{-1})^{\otimes 2} = \mathcal{O}_S$ .  $\square$

On souhaite à présent montrer que  $L$  admet une trivialisatation canonique sur  $2\Delta$  également. Pour cela, nous utiliserons une définition alternative de  $L$ . Il est alors nécessaire d'établir un lien entre  $L$  et le diviseur  $\Theta$ .

### 3.2 Diviseur $\Theta$

Dans cette section, on établit le lien entre  $L$  et le diviseur  $\Theta$ . On suppose dans cette section  $g \geq 1$  (le cas  $g = 0$  sera traité indépendamment).

#### 3.2.1 Lemmes sur le diviseur $\Theta$

Dans cette sous-section, on fera deux fois appel au théorème de la bascule (seesaw theorem, voir [9]) sous la forme suivante.

**Théorème 3.2** (de la bascule). *Soit  $S, T$  deux variétés analytiques compactes. Soit  $F$  un faisceau inversible sur  $S \times T$ . Si, pour  $t \in T$ , la restriction de  $F$  à  $S \times \{t\}$ , identifié à  $S$ , ne dépend pas de  $t$  à isomorphisme près, alors  $F$  est le produit tensoriel des tirés en arrière d'un faisceau inversible sur  $S$  et d'un faisceau inversible sur  $T$ .*

On note  $J$  le groupe de Picard de  $S$ . Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on note  $J^n$  l'ensemble des fibrés en droite de degré  $n$ , à isomorphisme près. Ainsi,  $J$  est l'union disjointe des  $J^n$ . Remarquons de plus que  $J^0$  est la jacobienne de  $S$ . De plus,  $\Theta$  est un diviseur de  $J^{g-1}$ .

Pour  $\alpha \in J$ , on note  $\alpha^*\Theta = \{\zeta \otimes \alpha^{-1}, \zeta \in \Theta\}$ . C'est donc un translaté de  $\Theta$  inclus dans  $J^n$  pour un entier  $n$ . Si  $\alpha \in J^{g-1}$ , alors  $\alpha^*\Theta \in J^0$ .

**Lemme 3.3.** *On a  $\{K_S \otimes \alpha^{-1}, \alpha \in \Theta\} = \Theta$ .*

*Démonstration.* Soit  $\alpha \in J^{g-1}$ . Alors  $K_S \otimes \alpha^{-1}$  est aussi de degré  $g-1$ . Par théorème de Riemann-Roch, leurs espaces de sections globales sont de même dimension. Or, un fibré en droites de degré  $g-1$  est dans  $\Theta$  si et seulement s'il admet une section globale non nulle. Donc  $\alpha \in \Theta$  si et seulement si  $K_S \otimes \alpha^{-1} \in \Theta$ , et on conclut avec le fait que  $J$  est un groupe.  $\square$

On souhaiterait pouvoir définir un diviseur  $\Theta_0$  comme  $\alpha^*\Theta$  pour un  $\alpha \in J^{g-1}$ , afin d'avoir  $\Theta_0 \subset J^0$ . Malheureusement,  $\Theta_0$  dépendrait du choix de  $\alpha$ . Cependant,  $2\Theta_0$  ne dépend pas de  $\alpha$  à équivalence linéaire près, à condition de choisir pour  $\alpha$  une caractéristique thêta. Plus généralement, l'équivalence linéaire est conservée pour un  $\alpha$  quelconque dans  $J^{g-1}$  en définissant le diviseur par  $\alpha^*\Theta + (K_S \otimes \alpha^{-1})^*\Theta$ . On a ainsi une définition convaincante du faisceau  $\mathcal{O}(2\Theta_0)$ , au sens où il ne dépend pas de  $\alpha$ . La démonstration provient de [10].

**Lemme 3.4.** *Soit  $\alpha \in J^{g-1}$ . Alors la classe d'équivalence linéaire de  $\alpha^*\Theta + (K_S \otimes \alpha^{-1})^*\Theta$  ne dépend pas de  $\alpha$ .*

*Démonstration.* On considère le morphisme :

$$\begin{aligned} \mu : J^0 \times J^{g-1} &\rightarrow J^{g-1} \times J^{g-1} \\ (\xi, \alpha) &\mapsto (\xi \otimes \alpha, \xi \otimes K_S \otimes \alpha^{-1}). \end{aligned}$$

On considère  $\Xi := \mu^*(p_1^*\mathcal{O}(\Theta) \otimes p_2^*\mathcal{O}(\Theta))$ . Pour tout  $\xi \in J^0$ , on pose :

$$\begin{aligned} i_\xi : J^{g-1} &\rightarrow J^0 \times J^{g-1} \\ \alpha &\mapsto (\xi, \alpha) \end{aligned}$$

Alors  $i_\xi^*\Xi$  ne dépend, à isomorphisme près, pas de  $\xi$ . En effet, d'après le lemme 3.3,  $i_\xi^*\Xi = \mathcal{O}(\xi^*\Theta) \otimes \mathcal{O}(\xi^{-1*}\Theta)$ . Le théorème du carré (theorem of the square, [9]) nous dit qu'à isomorphisme près, ce faisceau ne dépend pas de  $\xi$ .

Pour tout  $\alpha \in J^{g-1}$ , on pose :

$$\begin{aligned} j_\alpha : J^0 &\rightarrow J^0 \times J^{g-1} \\ \xi &\mapsto (\xi, \alpha) \end{aligned}$$

D'après le théorème de la bascule,  $j_\alpha^*\Xi$  ne dépend pas de  $\alpha$  à isomorphisme près. On conclut en constatant que  $j_\alpha^*\Xi = \mathcal{O}(\alpha^*\Theta + (K_S \otimes \alpha^{-1})^*\Theta)$ .  $\square$

Dans le cadre du lemme précédent, on note  $\mathcal{O}(2\Theta_0)$  le faisceau associé au diviseur  $\alpha^*\Theta + (\mathbb{K}_S \otimes \alpha^{-1})^*\Theta$  (qui ne dépend donc pas du choix de  $\alpha$ ).

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on considère  $S_n$  la  $n$ -ième puissance symétrique de  $S$ . On définit l'application d'Abel-Jacobi :

$$A_n : \begin{array}{ccc} S_n & \rightarrow & J^n \\ (x_k)_{1 \leq k \leq n} & \mapsto & \sum_{k=1}^n x_k. \end{array}$$

Cette application est birationnelle.

Les deux lemmes qui suivent proviennent de [13].

**Lemme 3.5.** *Soit  $\eta \in J^{g-2}$ . On pose :*

$$I_\eta : \begin{array}{ccc} S & \rightarrow & J^{g-1} \\ x & \mapsto & \eta \otimes \mathcal{O}(x) \end{array}$$

avec  $\mathcal{O}(x)$  le faisceau inversible sur  $S$  associé au diviseur de Weil  $x$ . Alors  $I_\eta^* \mathcal{O}(\Theta) = \mathbb{K}_S \otimes \eta^{-1}$ .

*Démonstration.* D'après le théorème de Riemann-Roch, tout élément de  $J^g$  a une section globale, donc est dans l'image de  $A_g$ . De plus, comme  $A_g$  est birationnelle, il existe un ouvert dense de  $J^g$  sur lequel tout élément a un unique antécédent par  $I_\eta$ . Ainsi, l'ensemble des fibrés dont l'espace des sections globales est de dimension 1 est dense dans  $J^g$ .

Soit  $\eta \in J^{g-2}$ . Par densité, on peut supposer que l'espace des sections globales de  $\mathbb{K}_S \otimes \eta^{-1}$  est de dimension 1. Soit  $(x_k)$  l'unique antécédent de  $\mathbb{K}_S \otimes \eta^{-1}$  par  $A_g$ . Alors :

$$\begin{aligned} I_\eta^{-1}(\Theta) &= \{x \in S, \dim H^0(S, \eta \otimes \mathcal{O}(x)) \neq 0\} \\ &= \{x \in S, \dim H^0(S, \mathbb{K}_S \otimes \eta^{-1} \otimes \mathcal{O}(-x)) \neq 0\} \quad (\text{Riemann-Roch}) \\ &= \{x_k, 1 \leq k \leq n\}. \end{aligned}$$

Par conséquent  $I_\eta^* \mathcal{O}(\Theta) = \mathcal{O}(\sum_{k=1}^n x_k) = \mathbb{K}_S \otimes \eta$ . □

Soit  $\alpha \in J^{g-1}$ . On pose le faisceau en droites sur  $S^2$  :

$$M_\alpha := p_1^*(\mathbb{K}_S \otimes \alpha^{-1}) \otimes p_2^*(\alpha) \otimes \mathcal{O}(\Delta)$$

ainsi que l'application :

$$\phi_\alpha : \begin{array}{ccc} S^2 & \rightarrow & J^{g-1} \\ (x, y) & \mapsto & \alpha \otimes \mathcal{O}(x - y). \end{array}$$

**Lemme 3.6.** *Les faisceaux  $M_\alpha$  et  $\phi_\alpha^* \mathcal{O}(\Theta)$  sont isomorphes.*

*Démonstration.* On considère un point  $x \in S$ . Regardons la restriction de  $M_\alpha$  à  $\{x\} \times S$ , identifié à  $S$  :

- la restriction de  $p_1^*(\mathbb{K}_S \otimes \alpha^{-1})$  est isomorphe à  $\mathcal{O}_S$  ;
- la restriction de  $p_2^*(\alpha)$  est  $\alpha$  ;
- la restriction de  $\mathcal{O}(\Delta)$  est  $\mathcal{O}(x)$ .

Ainsi la restriction de  $M_\alpha$  est isomorphe à  $\alpha \otimes \mathcal{O}(x)$ .

Regardons à présent la restriction de  $\phi_\alpha^* \mathcal{O}(\Theta)$  à  $\{x\} \times S$ . Elle est égale au tiré en arrière de  $\mathcal{O}(\Theta)$  par l'application  $y \mapsto \alpha \otimes \mathcal{O}(x-y)$ . D'après le lemme 3.3, c'est aussi le tiré en arrière de  $\mathcal{O}(\Theta)$  par l'application  $y \mapsto K_S \otimes \alpha^{-1} \otimes \mathcal{O}(y-x)$ , qui n'est autre que l'application  $I_{K_S \otimes \alpha^{-1} \otimes \mathcal{O}(-x)}$ . Le lemme 3.5 nous dit que ce faisceau est égal à  $\alpha \otimes \mathcal{O}(x)$ . Ainsi,  $M_\alpha$  et  $\phi_\alpha^* \mathcal{O}(\Theta)$  ont la même restriction à  $\{x\} \times S$ .

De la même manière, on constate que les deux faisceaux ont la même restriction à  $S \times \{x\}$ , qui est  $K_S \otimes \alpha^{-1} \otimes \mathcal{O}(x)$ . Par le théorème de la bascule, les deux faisceaux sont donc isomorphes.  $\square$

**Remarque 3.7.** *Une démonstration alternative est donnée dans l'article [3]. Cette dernière a l'avantage de démontrer que l'isomorphisme est canonique. Elle utilise le déterminant de la cohomologie (voir [5]).*

### 3.2.2 Lien avec $L$

On peut lier le faisceau  $L$  au faisceau  $\mathcal{O}(2\Theta_0)$  défini précédemment.

**Proposition 3.8.** *On considère la fonction :*

$$\begin{aligned} \phi : \quad S^2 &\rightarrow J^0 \\ (x, y) &\mapsto \mathcal{O}(x-y) \end{aligned}$$

qui à  $(x, y)$  associe le faisceau inversible sur  $S$  associé au diviseur de Weil  $x-y$ . Alors  $L$  et  $\phi^* \mathcal{O}(2\Theta_0)$  sont isomorphes.

*Démonstration.* On définit l'involution :

$$\begin{aligned} \sigma : \quad S^2 &\rightarrow S^2 \\ (x, y) &\mapsto (y, x) \end{aligned}$$

Alors  $\sigma^* M_\alpha = p_1^*(\alpha) \otimes p_2^*(K_S \otimes \alpha^{-1}) \otimes \mathcal{O}(\Delta)$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} M_\alpha \otimes \sigma^* M_\alpha &= p_1^*(\alpha \otimes K_S \otimes \alpha^{-1}) \otimes p_2^*(\alpha \otimes K_S \otimes \alpha^{-1}) \otimes \mathcal{O}(\Delta)^{\otimes 2} \\ &= p_1^* K_S \otimes p_2^* K_S \otimes \mathcal{O}(2\Delta) \\ &= K_{S^2} \otimes \mathcal{O}(2\Delta) \\ &= L. \end{aligned}$$

On peut à présent appliquer le lemme 3.6. Il est nécessaire de déterminer  $\sigma^* \phi_\alpha^* \mathcal{O}(\Theta)$ . Il s'agit de  $b^* \mathcal{O}(\Theta)$  pour  $b : (x, y) \mapsto \alpha \otimes \mathcal{O}(y-x)$ . D'après le lemme 3.3, on a  $\sigma^* \phi_\alpha^* \mathcal{O}(\Theta) = \phi_{K_S \otimes \alpha^{-1}}^*$ . Par conséquent  $L$  est isomorphe à  $\phi^* \mathcal{O}(2\Theta_0)$  par définition de  $\mathcal{O}(2\Theta_0)$ .  $\square$

## 3.3 Trivialisations de $L$

**Théorème 3.9.** *Il existe une section globale du fibré  $L$  qui le trivialise sur tout voisinage infinitésimale  $n\Delta$  de  $\Delta$ .*

*Démonstration.* Pour le cas  $g \geq 1$ , une fonction  $\theta$  de Riemann donne une section globale du faisceau  $\mathcal{O}(\Theta)$ , définie sur  $J^{g-1}$ , dont le diviseur est  $\Theta$ . Comme  $\Theta$  est de codimension 1 dans  $J^{g-1}$ , il existe  $\alpha \in J^{g-1}$  tel que ni  $\alpha$  ni  $K_S \otimes \alpha^{-1}$  ne soient dans  $\Theta$ . On en déduit qu'il y a une section globale  $t$  de  $\mathcal{O}(2\Theta_0)$  non nulle en 0.

Comme l'image de  $\Delta$  par  $\phi$  est 0, on en déduit par la proposition 3.8 que  $f := \phi^*t$  est une section globale de  $L$  qui ne s'annule nul part sur  $\Delta$ , et donc non nulle sur un ouvert de Zariski contenant  $\Delta$ . Restreinte à  $n\Delta$ , elle fournit une trivialisatoin.

Pour le cas  $g = 0$ , on se réfère à l'exemple suivant.  $\square$

**Exemple 3.10.** *On peut décrire explicitement une section globale qui ne s'annule pas sur  $\Delta$  dans le cas  $g = 0$ . On considère des coordonnées homogènes  $([z_1 : t_1], [z_2 : t_2])$  sur  $(\mathbb{P}^1)^2$ . On considère alors la section globale  $l$  de  $L$  donnée par :*

$$\begin{aligned} & - \frac{d\left(\frac{z_1}{t_1}\right) \wedge d\left(\frac{z_2}{t_2}\right)}{\left(\frac{z_1 - z_2}{t_1 - t_2}\right)^2} \text{ sur } \{t_1 \neq 0, t_2 \neq 0\}; \\ & - \frac{d\left(\frac{t_1}{z_1}\right) \wedge d\left(\frac{z_2}{t_2}\right)}{\left(\frac{t_1 z_2}{z_1 t_2} - 1\right)^2} \text{ sur } \{z_1 \neq 0, t_2 \neq 0\}; \\ & - \frac{d\left(\frac{z_1}{t_1}\right) \wedge d\left(\frac{t_2}{z_2}\right)}{\left(\frac{z_1 t_2}{t_1 z_2} - 1\right)^2} \text{ sur } \{t_1 \neq 0, z_2 \neq 0\}; \\ & - \frac{d\left(\frac{t_1}{z_1}\right) \wedge d\left(\frac{t_2}{z_2}\right)}{\left(\frac{t_1 - t_2}{z_1 - z_2}\right)^2} \text{ sur } \{z_1 \neq 0, z_2 \neq 0\}. \end{aligned}$$

L'identification de  $L|\Delta$  à  $\mathcal{O}_S$  de la proposition 3.1 envoie  $l$  sur 1.

**Exemple 3.11.** *On considère le cas  $g = 1, S = \mathbb{C}/\Gamma$ . Notons que comme  $g = 1$ ,  $K_S$  est trivial donc  $L$  s'identifie à  $\mathcal{O}(2\Delta)$ . De plus  $J^{g-1} = J^0 = S$ , et le diviseur  $\Theta$  est simplement le point 0. On pose  $\alpha = 0$ , ainsi  $\alpha^*\Theta + (K_S \otimes \alpha^{-1})^*\Theta$  est le diviseur  $2\{0\}$ .*

*On considère le faisceau des fonctions thêta, dont les sections sur un ouvert  $U$  est un espace de fonctions définies sur l'image réciproque de  $U$  par la projection canonique  $\mathbb{C} \rightarrow S$ . C'est un faisceau inversible. La fonction  $\theta_{11}$  de Jacobi en est une section globale, elle a pour diviseur 0. Son carré  $\theta_{11}^2$  est dans l'espace des fonctions thêta d'ordre 2, son diviseur est  $2\{0\}$ . Ainsi,  $\mathcal{O}(2\{0\})$  (faisceau des fonctions méromorphes sur  $S$  ayant un pôle seulement en 0 d'ordre au plus 2) s'identifie au faisceau des fonctions thêta d'ordre 2 via  $f \rightarrow f\theta_{11}^2$ .*

*Dans le second faisceau, la fonction thêta de Jacobi  $\theta_{00}^2$  n'est pas nulle en 0. On peut donc prendre  $f = \phi^*\left(\frac{\theta_{00}}{\theta_{11}}\right)^2$  (la fonction  $\frac{\theta_{00}}{\theta_{11}}$  est bien définie sur  $S$ ). On a ainsi la section globale de  $L$  ne s'annulant pas sur  $\Delta$  :*

$$\left(\frac{\theta_{00}(z_1 - z_2)}{\theta_{11}(z_1 - z_2)}\right)^2 dz_1 \wedge dz_2.$$

*Une autre section de  $\mathcal{O}(2\{0\})$  qui n'a pas 0 dans son diviseur est la fonction elliptique de Weierstrass  $\wp$ . Ce qui donne la section globale de  $L$  :*

$$\wp(z_1 - z_2) dz_1 \wedge dz_2.$$

Le théorème 3.9 a le corollaire suivant, qui nous permettra de déterminer la dimension de l'espace des sections globales de  $L$ .

**Corollaire 3.12.** *L'espace des sections globales de  $L$  est de dimension supérieure à  $g^2 + 1$ .*

*Démonstration.* En effet, en considérant  $\mathcal{O}(2\Delta)$  comme le faisceau des fonctions analytiques holomorphes en dehors de  $\Delta$  et présentant un pôle d'ordre au plus 2 sur  $\Delta$ ,  $\mathcal{O}_S$  est inclus dans  $\mathcal{O}(2\Delta)$  donc  $K_S$  est inclus dans  $L$ . Comme  $H^0(S^2, K_{S^2})$ , est de dimension  $g^2$ , il reste à montrer que  $L$  a une section globale non nulle qui n'est pas dans ce sous-espace vectoriel.

Celle du théorème 3.9 convient : elle n'est pas dans le sous-espace défini précédemment, car, par définition, ses éléments ont  $\Delta$  dans leur diviseur (avec pour multiplicité au moins 2).  $\square$

**Théorème 3.13.** *Le fibré  $L$  a une unique trivialisaton sur  $2\Delta$  stable par l'action de l'involution  $\sigma$  et coïncidant avec la trivialisaton canonique de  $L$  sur  $\Delta$ . Celle-ci est la restriction d'une section globale.*

*Démonstration.* On considère le faisceau cohérent d'idéaux  $\mathcal{I}$  des fonctions analytiques sur  $S^2$  s'annulant sur la diagonale. On a alors une suite exacte de  $\mathcal{O}_{S^2}$ -modules :

$$0 \rightarrow \mathcal{I} / \mathcal{I}^2 \rightarrow \mathcal{O}_{S^2} / \mathcal{I}^2 \rightarrow \mathcal{O}_{S^2} / \mathcal{I} \rightarrow 0.$$

Remarquons que  $\mathcal{I} / \mathcal{I}^2 = \mathcal{I} \otimes \mathcal{O}_S / \mathcal{I} = \mathcal{O}(-\Delta) \otimes \mathcal{O}_S / \mathcal{I}$ . On prend le produit tensoriel par  $L$  :

$$0 \rightarrow K_S \otimes \mathcal{O}(\Delta) \otimes \mathcal{O}_S / \mathcal{I} \rightarrow L \otimes \mathcal{O}_{S^2} / \mathcal{I}^2 \rightarrow L \otimes \mathcal{O}_{S^2} / \mathcal{I} \rightarrow 0.$$

Les faisceaux sont à support dans  $\Delta$ , donc on peut d'y restreindre. On applique la formule d'adjonction au faisceau à gauche et la proposition 3.1 au faisceau à droite pour obtenir la suite exacte :

$$0 \rightarrow K_\Delta \rightarrow L|_{2\Delta} \rightarrow \mathcal{O}_\Delta \rightarrow 0.$$

Comme une trivialisaton de  $L|_{2\Delta}$  se restreint en une trivialisaton de  $L|\Delta$ , le morphisme  $H^0(\Delta, L|_{2\Delta}) \rightarrow H^0(\Delta, L|\Delta) \simeq \mathbb{C}$  est surjectif. Donc les sections globales forment aussi une suite exacte :

$$0 \rightarrow H^0(\Delta, K_\Delta) \rightarrow H^0(\Delta, L|_{2\Delta}) \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

Elle va nous permettre d'étudier l'endomorphisme  $\tilde{\sigma}$  induit par  $\sigma$  sur  $H^0(\Delta, L|_{2\Delta})$  (on notera également  $\tilde{\sigma}$  l'endomorphisme induit par  $\sigma$  sur  $H^0(S^2, L)$ ).

D'une part, pour tout  $h \in H^0(\Delta, K_\Delta)$ , on a  $\tilde{\sigma}(h) = -h$ . En effet, l'action de  $\sigma$  sur le fibré normal de  $\Delta$  est l'opposition, et  $K_S$  est le fibré conormal. Ainsi,  $H^0(\Delta, L|_{2\Delta})$  a  $H^0(\Delta, K_\Delta)$  pour hyperplan propre pour  $\tilde{\sigma}$  de valeur propre  $-1$ .

D'autre part, soit  $h$  une section globale de  $L|_{2\Delta}$  donnée par le théorème 3.9. Par définition, son image par la forme linéaire de la suite exacte n'est pas nulle. De plus  $\tilde{\sigma}(h)$  a la même image. Ainsi  $h + \tilde{\sigma}(h)$  est invariant par  $\tilde{\sigma}$  et non nul car d'image non nulle par la forme linéaire. Alors il y a une droite propre de  $\tilde{\sigma}$  pour la valeur propre 1. Comme il y a un hyperplan propre pour une autre valeur propre, cette droite est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1. Ainsi la trivialisaton canonique de  $L$  sur  $\Delta$  a un unique antécédent invariant par l'action de  $\sigma$ .  $\square$

**Définition 3.14** (Trivialisation canonique). *La trivialisation de  $L|_{2\Delta}$  donnée par le théorème précédent est dite canonique.*

**Exemple 3.15.** *Dans le cas  $g = 0$ , la section globale  $l$  de l'exemple 3.10 restreinte à  $2\Delta$  est la trivialisation canonique.*

**Exemple 3.16.** *Dans le cas  $g = 1$ , la section globale  $\wp(z_1 - z_2) dz_1 \wedge dz_2$  restreinte à  $2\Delta$  est la trivialisation canonique, la partie principale de  $\wp$  en 0 étant  $\frac{1}{z^2}$ .*

*Au voisinage de  $\Delta$  (ce qui suffit pour la restreindre à  $2\Delta$ ), elle s'écrit plus simplement :*

$$\frac{dz_1 \wedge dz_2}{(z_1 - z_2)^2}$$

*où les coordonnées  $z_1$  et  $z_2$  (à priori définies chacune seulement à l'action de  $\Gamma$  près) sont localement choisis de manière à ce que leur différence tendent vers 0 à l'approche de la diagonale.*

### 3.4 Sections globales de $L$

On peut calculer la dimension de  $H^0(S^2, L)$ .

**Proposition 3.17.** *La dimension de  $H^0(S^2, L)$  est  $g^2 + 1$ .*

*Démonstration.* Commençons par montrer que  $\dim H^0(S^2, \mathbb{K}_{S^2} \otimes \mathcal{O}(\Delta)) = g^2$ . On considère la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_{S^2} \rightarrow \mathcal{O}_\Delta \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

Avec  $\mathcal{I} = \mathcal{O}(-\Delta)$  et la formule d'adjonction, le produit tensoriel par  $\mathbb{K}_{S^2} \otimes \mathcal{O}(\Delta)$  donne :

$$0 \rightarrow \mathbb{K}_{S^2} \rightarrow \mathbb{K}_{S^2} \otimes \mathcal{O}(\Delta) \rightarrow \mathbb{K}_\Delta \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

Donc on a :

$$0 \rightarrow H^0(S^2, \mathbb{K}_{S^2}) \rightarrow H^0(S^2, \mathbb{K}_{S^2} \otimes \mathcal{O}(\Delta)) \rightarrow H^0(S^2, \mathbb{K}_\Delta).$$

La dimension de  $H^0(S^2, \mathbb{K}_{S^2})$  est  $g^2$ , il suffit donc de montrer que l'injection  $H^0(S^2, \mathbb{K}_{S^2}) \rightarrow H^0(S^2, \mathbb{K}_{S^2} \otimes \mathcal{O}(\Delta))$  est un isomorphisme. On reprend alors la suite exacte 3.3 à laquelle on applique le foncteur image directe  $p_{1*}$ , qui est exact à gauche. On a  $p_{1*} \mathbb{K}_{S^2} = \mathbb{K}_S \otimes \mathbb{C}^g$ , donc une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathbb{K}_S \otimes \mathbb{C}^g \rightarrow p_{1*}(\mathbb{K}_{S^2} \otimes \mathcal{O}(\Delta)) \rightarrow \mathbb{K}_S$$

donc les trois faisceaux sont localement libres. Les deux premiers sont de rang  $g$ , et leur quotient est localement libre, donc nul. Ainsi le premier morphisme est surjectif. Par conséquent l'injection  $H^0(S^2, \mathbb{K}_{S^2}) \rightarrow H^0(S^2, \mathbb{K}_{S^2} \otimes \mathcal{O}(\Delta))$  est un isomorphisme : alors  $\dim H^0(S^2, \mathbb{K}_{S^2} \otimes \mathcal{O}(\Delta)) = g^2$ .

Pour conclure, on revient à la suite exacte 3.2. On fait le produit tensoriel cette fois ci par  $L$ . On obtient :

$$0 \rightarrow \mathbb{K}_{S^2} \otimes \mathcal{O}(\Delta) \rightarrow L \rightarrow L|_\Delta \rightarrow 0$$

et on passe aux sections globales, en utilisant la proposition 3.1 :

$$0 \rightarrow H^0(S^2, \mathbb{K}_{S^2} \otimes \mathcal{O}(\Delta)) \rightarrow H^0(S^2, L) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Ainsi  $\dim H^0(S^2, L) \leq g^2 + 1$  et on conclut avec le corollaire 3.12.  $\square$

**Corollaire 3.18.** *La section globale  $l$  de l'exemple 3.10 est stable par l'action diagonale de  $\mathcal{M}$  sur  $(\mathbb{P}^1)^2$ .*

*Démonstration.* Comme  $g = 0$ , l'espace des sections globales de  $L$  est de dimension 1. De plus, la forme linéaire non nulle  $L \rightarrow L|\Delta \simeq \mathbb{C}$  est invariante par l'action de  $\mathcal{M}$ . Donc la représentation de  $\mathcal{M}$  sur l'espace des sections globales de  $L$  est triviale.  $\square$

**Corollaire 3.19.** *La trivialisaton du théorème 3.13 est l'unique restriction d'une section globale de  $L$  à induire la trivialisaton canonique sur  $\Delta$ .*

*Démonstration.* En faisant le produit tensoriel de la suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{I}^2 \rightarrow \mathcal{O}_{S^2} \rightarrow \mathcal{O}_{2\Delta} \rightarrow 0$  par  $L$ , on obtient la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathbb{K}_{S^2} \rightarrow L \rightarrow L|2\Delta \rightarrow 0 \quad (3.4)$$

donc :

$$0 \rightarrow H^0(S^2, \mathbb{K}_{S^2}) \rightarrow H^0(S^2, L) \rightarrow H^0(S^2, L|2\Delta).$$

La dimension de l'espace à gauche est  $g^2$  et celle de l'espace du milieu  $g^2 + 1$ . Donc l'image de l'espace du milieu dans celui à droite est de dimension 1.  $\square$

## 3.5 Lien avec les structures projectives

### 3.5.1 Lien avec la définition locale

On définit le faisceau  $\mathcal{T}$  dont les sections sur un ouvert  $U \subset S$  sont les trivialisations de  $L$  sur  $(3\Delta) \cap U^2$  qui induisent la restriction de la trivialisaton canonique sur  $(2\Delta) \cap U^2$ .

Remarquons que le faisceau  $\mathcal{T}$  a une structure canonique de  $\mathcal{Q}$ -torseur. En effet, de la même manière que l'on a montré la suite exacte 3.1, on peut montrer la suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{Q}(S) \rightarrow L|3\Delta \rightarrow L|2\Delta \rightarrow 0$ , et plus généralement la même suite exacte sur tout ouvert  $U \subset S$ . Pour  $t_1, t_2$  deux sections de  $\mathcal{T}$  sur le même domaine, on note  $[t_1, t_2]$  la différentielle quadratique holomorphe définie par  $t_1 - t_2$ .

**Remarque 3.20.** *La structure d'espace affine sur  $\mathcal{T}(S)$  permet d'envisager la question de la surjectivité sur  $\mathcal{T}(S)$  de l'application qui, à une section globale de  $L$  dont la restriction à  $2\Delta$  est la trivialisaton canonique, associe sa restriction à  $3\Delta$ . D'après la suite exacte 3.4, l'ensemble des sections globales de  $L$  dont la restriction à  $2\Delta$  est la trivialisaton canonique est un  $\mathbb{K}_{S^2}$ -espace affine. La restriction sur  $\mathcal{T}(S)$  est une fonction affine. Sa partie linéaire est l'application  $H^0(S^2, \mathbb{K}_{S^2}) = H^0(S, \mathbb{K}_S)^{\otimes 2} \rightarrow \mathcal{Q}(S)$  aussi donnée par la restriction. Alors, le théorème de Max Noether nous dit qu'au moins dans le cas où  $S$  est non-hyperelliptique, la surjectivité voulue est vraie.*



On peut faire le lien avec les structures projectives. Cependant, le faisceau  $\mathcal{T}$  présente dans sa définition une différence majeure avec les faisceaux  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{J}$ . La définition de  $\mathcal{T}$  fait appel à la trivialisatation canonique, dont la définition est globale : la définition de  $\Gamma(\mathcal{T}, U)$  pour un ouvert  $U$  de  $S$  n'est à priori pas indépendante de l'inclusion  $U \subset S$ , là où pour  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{J}$  la structure de surface de Riemann de  $U$  suffit. Cela impose certaines précautions. On commence donc par montrer l'équivalence pour les structures projectives définies sur  $S$  tout entier.

**Lemme 3.21.** *Les  $\mathcal{Q}(S)$ -espaces affines  $\mathcal{P}(S)$  et  $\mathcal{T}(S)$  sont canoniquement isomorphes.*

*Démonstration.* Définissons l'isomorphisme  $\mathcal{P}(S) \rightarrow \mathcal{T}(S)$ . Soit  $P \in \mathcal{P}(S)$ , on doit définir un élément  $m$  de  $L|3\Delta$ . Soit  $x \in U$  : on définit  $m$  au voisinage de  $(x, x)$ . Pour cela, on considère la section  $l$  de l'exemple 3.10, et  $(U, \phi)$  une carte telle que  $x \in U$ . On a alors une application  $\phi^2 : U^2 \rightarrow (\mathbb{P}^1)^2$ , et on peut considérer  $(\phi^2)^*l$ , qui est dans  $H^0(U^2, L)$ . Cette section ne dépend pas du choix de la carte, grâce au corollaire 3.18. On peut recoller les différentes sections pour avoir une section globale  $m$  de  $L$  définie sur un voisinage de  $\Delta$ . C'est bien une trivialisatation de chaque  $n\Delta$  car  $l$  ne s'annule pas.

Montrons que la restriction de  $m$  à  $2\Delta$  est la trivialisatation canonique. Comme  $l$  est stable par l'action de  $\sigma$  et sa restriction à  $\Delta$  est la trivialisatation canonique, c'est aussi le cas de  $m$ , car  $(\phi^2)^*$  commute avec l'action de  $\sigma$  et avec l'isomorphisme canonique de faisceaux de la proposition 3.1.

Montrons que l'application  $\omega : \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathcal{T}(S)$  qui à  $P$  associe  $m$  est un isomorphisme d'espaces affines. Pour cela, on montre que pour  $P \in \mathcal{P}(S), \gamma \in \mathcal{Q}(S)$ , on a  $\omega(P + \gamma) = \omega(P) + \frac{\gamma}{6}$  (la constante 6 provient du  $3!$  de l'ordre 3 d'une série de Taylor).

Soit  $x \in S$ . Soit  $(U, z)$  et  $(U, f)$  deux cartes (pas nécessairement dans un même atlas) telle que  $x \in U$ . Quitte à composer par des transformations de Möbius et à restreindre  $U$ , on suppose  $\infty \notin z(U) \cup f(U), z(x) = 0, f = z + az^3 + O(z^4)$  pour un  $a \in \mathbb{C}$ . Pour  $k = 1$  ou  $2$ , on note  $z_k$  et  $f_k$  les composées de  $z$  et  $f$  par la projection sur la  $k$ -ième coordonnée de  $U^2$ . Alors on a, pour  $y \in U$ , en se restreignant à  $3\Delta$  :

$$\frac{df_1 \wedge df_2}{(f_1 - f_2)^2}(y, y) = \frac{dz_1 \wedge dz_2}{(z_1 - z_2)^2}(y, y) + \lambda(y) dz_1 \wedge dz_2$$

avec  $\lambda$  une fonction holomorphe sur  $U$ , telle que le vecteur  $[\omega(P), \omega(Q)]$  est  $\lambda dz^{\otimes 2}$ . Il faut donc montrer que  $6\lambda(x)$  est la dérivée schwarzienne  $\{f, z\}(x)$ , qui vaut  $6a$ .

On commence par se restreindre au fermé d'équation  $z_1 + z_2 = 0$ , le membre

de gauche devient :

$$\begin{aligned}
\frac{df_1 \wedge df_2}{(f_1 - f_2)^2} &= \frac{dz_1 \wedge dz_2}{(f(z_1) - f(-z_1))^2} \frac{\partial f}{\partial z}(z_1) \frac{\partial f}{\partial z}(-z_1) \\
&= \frac{dz_1 \wedge dz_2}{(2z_1)^2} (1 + 3az_1^2 + O(z_1^3))^2 \frac{1}{(1 + az_1^2 + O(z_1^3))^2} \\
&= \frac{dz_1 \wedge dz_2}{4z_1^2} (1 + 6az_1^2 + O(z_1^3))(1 - 2az_1^2 + O(z_1^3)) \\
&= \frac{dz_1 \wedge dz_2}{4z_1^2} (1 + 4az_1^2 + O(z_1^3)) \\
&= \frac{dz_1 \wedge dz_2}{(z_1 - z_2)^2} + (a + O(z_1)) dz_1 \wedge dz_2.
\end{aligned}$$

Ainsi, en se restreignant à  $\{z_1 + z_2 = 0\} \cap 3\Delta$ , on obtient bien  $\lambda(y) = a$ .  $\square$

**Exemple 3.22.** Dans le cas  $g = 1$ , une structure projective sera représentée sous la forme :

$$\frac{1}{(z_1 - z_2)^2} dz_1 \wedge dz_2 + a dz_1 \wedge dz_2.$$

avec  $6a$  la dérivée schwarzienne par rapport à la structure canonique.

On peut finalement montrer la correspondance entre les toiseurs.

**Théorème 3.23.** Les  $\mathcal{Q}$ -toiseurs  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{T}$  sont canoniquement isomorphes.

*Démonstration.* Le calcul de la démonstration précédente montre que pour des fonctions méromorphes  $f$  sans point critique définie sur  $U \subset S$ ,  $(f^2)^*l$  restreinte à  $2\Delta$  ne dépend pas du choix de  $f$ , et est donc toujours la restriction de la trivialisatation canonique. Par conséquent, la preuve précédente peut être refaite en restriction à un ouvert  $U$ .  $\square$

### 3.5.2 Lien avec la définition infinitésimale

On peut expliciter l'isomorphisme de toiseur  $\eta$  entre  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{J}$ , le toiseur de la deuxième définition infinitésimale de structure projective. On considère  $f$  une section de  $\mathcal{J}$  définie sur un voisinage d'un point  $x \in S$ . On considère une section  $\bar{f}$  du faisceau  $\mathcal{K}$  induisant  $f$  définie sur un voisinage de  $x$ . On considère une fonction holomorphe injective  $\tilde{f}$  définie sur un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  et qui induit  $\bar{f}(x)$  en  $x$ . On considère alors la fonction  $\tilde{f}^2 : U^2 \rightarrow \mathbb{P}^1$ . On peut définir la section  $c = (\tilde{f}^2)^*l \in \Gamma(U, \mathcal{T})$ . On a alors  $\eta(f)(x) = c(x)$ .

# Bibliographie

- [1] Lipman BERS. “Simultaneous uniformization”. In : *Bulletin of the American Mathematical Society* 66.2 (1960), p. 94-97.
- [2] Indranil BISWAS et AK RAINA. “Projective structures on a Riemann surface”. In : *arXiv preprint alg-geom/9607026* (1996).
- [3] Indranil BISWAS et AK RAINA. “Relative curves, theta divisor, and Deligne pairing”. In : *International Mathematics Research Notices* 1995.9 (1995), p. 425-435.
- [4] Pierre DELIGNE. *Équations différentielles à points singuliers réguliers*. T. 163. Springer, 2006.
- [5] Pierre DELIGNE. “Le déterminant de la cohomologie”. In : *Contemp. Math., AMS* 67 (1987), p. 93-177.
- [6] John H HUBBARD. “The monodromy of projective structures”. In : *Riemann surfaces and related topics : Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, NY, 1978)*. T. 97. 1981, p. 257-275.
- [7] Frank LORAY et David MARIN. “Projective structures and projective bundles over compact Riemann surfaces”. In : *arXiv preprint arXiv :0706.3608* (2007).
- [8] Gerard Freixas MONTPLET, Dennis ERIKSSON et Richard A WENTWORTH. “Complex Chern–Simons bundles in the relative setting”. In : (2021).
- [9] David MUMFORD, Chidambaran Padmanabhan RAMANUJAM et Jurij Ivanovič MANIN. *Abelian varieties*. T. 5. Oxford university press Oxford, 1974.
- [10] MS NARASIMHAN et S RAMANAN. “2theta-linear systems on abelian varieties”. In : *Vector bundles on algebraic varieties* (1984), p. 415-427.
- [11] Henri POINCARÉ. “Sur les groupes des équations linéaires”. In : *Acta mathematica* 4.1 (1884), p. 201-312.
- [12] AK RAINA. “An algebraic geometry view of a model quantum field theory on a curve”. In : *Geometry from the Pacific Rim, eds. Berrick, ea* (1997), p. 311-329.
- [13] AK RAINA. “Fay’s trisecant identity and conformal field theory”. In : *Communications in mathematical physics* 122.4 (1989), p. 625-641.
- [14] Henri Paul de SAINT-GERVAIS. *Uniformisation des surfaces de Riemann : retour sur un théorème centenaire*. ENS, 2010.