Sous-groupes finis de SO(3)

Éloan Rapion

31 décembre 2021

Résumé

Le présent document est le rapport du séminaire “Sous-groupes finis de SO(3)” effectué sous la supervision de Frank Loray. La première partie vise à identifier à isomorphisme près les sous-groupes finis de SO(3), et étudier leur action sur la sphère. La deuxième partie développe une application de cette étude : l'identification des paramètres de l'équation hypergéométrique de Gauss donnant des solutions toutes algébriques.

1 Action de $\mathrm{SO}(3)$ sur $\hat{\mathbb{C}}$

Cette section est consacrée à l'étude des sous-groupes finis de SO(3) et à leur action sur la sphère. La référence principale est [1].

1.1 Définition de l'action

D'une part, en tant que sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, le groupe SO(3) agit sur l'espace $\mathbb{R}^3$. Cette action stabilise la sphère $\mathbb{S}^2$, on a ainsi une action de SO(3) sur $\mathbb{S}^2$. D'autre part, le groupe de Möbius $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ agit sur la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$.

La projection stéréographique donne une bijection explicite entre $\mathbb{S}^2$ et $\hat{\mathbb{C}}$. Ainsi, peut transporter l'action de SO(3) sur $\mathbb{S}^2$ en une action sur $\hat{\mathbb{C}}$. Cette action se factorise par celle de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ sur $\hat{\mathbb{C}}$: on obtient ainsi un morphisme de groupe $\rho : \mathrm{SO}(3) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. On rappelle (sans le démontrer) le fait suivant :

Proposition 1. *Le morphisme de groupe ρ est injectif. Son image s'identifie canoniquement à* $\mathrm{PSU}_2(\mathbb{C})$.

L'intérêt du plongement précédent pour cette étude est de donner la possibilité d'identifier les sous-groupes finis de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ à partir de ceux de SO(3). En effet, par des considération sur les matrices de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, on peut démontrer le théorème suivant :

Théorème 1. *Tout sous-groupe fini de* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ *est conjugué à un sous-groupe de* $\mathrm{Im}\,\rho$.

1.2 Sous-groupes finis de $\mathrm{SO}(3)$

Commençons par identifier les sous-groupes finis de O(2).

Proposition 2. *Un sous-groupe fini de* $\mathrm{O}(2)$ *est cyclique s'il est inclus dans* $\mathrm{SO}(2)$*, diédral sinon.*

Démonstration. Comme $\mathrm{SO}(2)$ est isomorphe au groupe des nombres complexes de module 1, tous ses sous-groupes finis sont cycliques. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{O}(2)$ qui n'est pas inclus dans $\mathrm{SO}(2)$. Comme $\mathrm{SO}(2)$ est d'indice 2 dans $\mathrm{O}(2)$, $G \cap \mathrm{SO}(2)$ est d'indice 2 dans G, et c'en est donc un sous-groupe distingué. Soit $s \in G \setminus \mathrm{SO}(2)$. Alors s est une réflexion, donc d'ordre 2, et pour $r \in \mathrm{SO}(2)$, $srs = r^{-1}$. Ainsi G est diédral. $\square$

On peut déterminer, à isomorphisme près, et même à conjugaison près les sous-groupes finis de $\mathrm{SO}(3)$. Cela se fait en considérant l'action de $\mathrm{SO}(3)$ sur $\mathbb{S}^2$. Remarquons d'abord qu'un élément non neutre de G a exactement deux points fixes, qui sont antipodaux. En effet, en considérant l'action de $\mathrm{SO}(3)$ sur $\mathbb{R}^3$, tout élément non trivial a une droite vectorielle pour ensemble de points fixes, et celle-ci coupe $\mathbb{S}^2$ en deux points antipodaux. On commence par traiter deux cas particuliers.

Lemme 1. *Tout sous-groupe fini de* $\mathrm{SO}(3)$ *admettant un point fixe dans son action sur* $\mathbb{S}^2$ *est cyclique.*

Démonstration. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{SO}(3)$ fixant un point de $\mathbb{S}^2$. L'action de G sur $\mathbb{R}^3$ fixe alors une droite D. Ainsi G stabilise $D^\perp$ et s'injecte dans $\mathrm{SO}(D^\perp)$ (le groupe spécial orthogonal de l'espace euclidien $D^\perp$). On conclut avec la proposition 2. $\square$

Lemme 2. *Tout sous-groupe fini de* $\mathrm{SO}(3)$ *admettant une orbite de cardinal* 2 *dans son action sur* $\mathbb{S}^2$ *est diédral.*

Démonstration. Soit G un tel sous-groupe, soit $\{p, q\}$ une orbite de cardinal 2. Si le stabilisateur de p est trivial, par la formule des classes, G est d'ordre 2, donc diédral. Supposons dans la suite qu'il existe f non neutre dans le stabilisateur de p. Alors f stabilise aussi q, donc ce sont ses deux points fixes antipodaux, c'est-à-dire $q = -p$. Par conséquent tous les élément de G stabilisent $\mathrm{Vect}(p)$ (dans son action sur $\mathbb{R}^3$), et donc aussi le plan $P = \mathrm{Vect}(p)^\perp$. On a alors un morphisme de groupe $G \to \mathrm{O}(P)$. Celui-ci est injectif : si une isométrie fixe P, vaut l'identité ou son opposé sur $\mathrm{Vect}(p)$ et est directe, ça ne peut être que l'identité. Enfin, il existe $g \in G$ ne fixant pas p. Comme c'est une isométrie directe et son isométrie induite sur $\mathrm{Vect}(p)$ est indirecte, son isométrie induite sur P est indirecte. On conclut avec la proposition 2. $\square$

On peut maintenant démontrer le théorème principal de cette section.

Théorème 2. *Tout sous-groupe fini de* $\mathrm{SO}(3)$ *est isomorphe à un groupe cyclique, un groupe diédral,* $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4$ *ou* $\mathfrak{A}_5$.

Démonstration. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{SO}(3)$, d'ordre N. Considérons son action sur la sphère. Comme un élément non neutre a deux points fixes, l'ensemble F des points fixes d'un élément non neutres de G est alors un ensemble fini, dont on note M le cardinal. Il est stable par l'action de G : en effet, si p est point fixe de $f \in G$ non neutre, et $g \in G$, alors gfg^{-1} est non neutre avec $g(p)$ pour point fixe. Ainsi, on a une action d'un groupe fini, G, sur un ensemble fini, F.

Soit alors k le nombre d'orbites, $(\Omega_i)_{1\leq i\leq k}$ la collection de ces orbites, ordonnées de manière à ce que leurs cardinaux $(\omega_i)_{1\leq i\leq k}$ soit décroissants. Tous les éléments d'une orbite ont des stabilisateurs de même ordre, on note donc n_i l'ordre du stabilisateur de tout élément de Ω_i. La formule de Burnside donne alors :

$$k = \frac{M + 2(N-1)}{N}, \tag{1}$$

ce que l'on peut réécrire en :

$$2\left(1 - \frac{1}{N}\right) = k - \frac{M}{N}. \tag{2}$$

D'autre part, M est la somme des ω_i, et la formule des classes nous donne $\frac{\omega_i}{N} = x_i$. Ainsi, on obtient :

$$2\left(1 - \frac{1}{N}\right) = \sum_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{n_i}\right). \tag{3}$$

Par définition de F, $n_1 \geq 2$. Ainsi les termes de la somme sont tous supérieurs à $\frac{1}{2}$, donc $\frac{k}{2} \leq \sum_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{N}\right) < 2$. Ainsi $k \leq 3$.

Supposons $k = 1$. Alors $2\left(1 - \frac{1}{N}\right) = 1 - \frac{1}{n_1} < 1$, d'où $N = 1$. Ainsi G est trivial.

Supposons $k = 2$. Alors $2\left(1 - \frac{1}{N}\right) = 2 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}$, soit $\frac{N}{n_1} + \frac{N}{n_2} = 2$, donc $\omega_1 + \omega_2 = 2$. Ainsi $\omega_1 = \omega_2 = 1$. L'action a donc deux point fixes. On conclut avec le lemme 1.

Supposons $k = 3$. Alors :

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1 + \frac{2}{N}. \tag{4}$$

Le membre de droite est strictement supérieur à 1 : cela impose donc $n_1 = 2$ et $n_2 = 2$ ou 3.

- Supposons $n_1 = n_2 = 2$. La formule 4 donne $N = 2n_3$. Par conséquent $\omega_3 = 2$. On conclut avec le lemme 2.
- Supposons $n_1 = 2, n_2 = n_3 = 3$. La formule 4 donne $N = 12$, donc $\omega_2 = 4$. Comme un élément non neutre de G a deux points fixes, l'action de G sur ω_2 est fidèle, donc G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$. Le seul d'ordre 12 est $\mathfrak{A}_4$, donc G est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$.
- Supposons $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 4$. Alors $N = 24$, et $\omega_2 = 8$. Soit $p \in \Omega_2$: comme $-\mathrm{id}$ commute avec les éléments de $\mathrm{SO}(3)$, on a $-p \in F$ et l'orbite de $-p$ a 8 éléments. La seule telle orbite est Ω_2, donc $-p \in \Omega_2$. Ainsi l'action de G sur Ω_2 induit une action sur quatre pairs de points antipodaux : on a un morphisme de groupes $G \to \mathfrak{S}_4$. Par cardinalité, il suffit de montrer l'injectivité pour montrer que c'est un isomorphisme. Soit f dans le noyau de ce morphisme. Comme f stabilise les quatre couple, il associe à chaque élément de Ω_2 soit lui-même soit son opposé. Donc f^2 fixe tous les éléments de Ω_2, donc est l'identité.
  Par l'absurde, supposons que f n'est pas l'identité. Il est d'ordre 2, le stabilisateur d'un élément de Ω_2 est d'ordre $n_2 = 3$, donc par théorème de Lagrange, f ne fixe aucun élément de Ω_2. Donc il associe son opposé à chaque élément de Ω_2.

On en déduit que pour $g \in G$, gfg^{-1} est aussi $-\mathrm{id}$ lorsque restreint à Ω_2. Donc $gfg^{-1}f^{-1}$ a huit points fixes, donc est l'identité, donc $gfg^{-1} = f$. Or, si c et $-c$ sont les points fixes de f, $g(c), g(-c)$ sont ceux de gfg^{-1}. Donc l'orbite de c est de cardinal 1 ou 2, mais $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3 = 6$, donc c'est impossible. Ainsi G est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

— Supposons $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 5$. On a $N = 60$. Comme dans le cas précédant, les trois orbites sont stables par antipodisme. Deux points antipodaux ont le même stabilisateur, deux points ni égaux ni antipodes ont des stabilisateurs d'intersection triviale. On décrit alors une partition de G.
  — B_0 : L'identité toute seule (1 élément).
  — B_1 : Les éléments non triviaux d'un stabilisateur d'un élément de Ω_1. Ces éléments sont d'ordre 2 car $n_1 = 2$ est premier, et conjugués car fixant des éléments d'une même orbite. On a $\omega_1 = 30$ et comme l'orbite contient des pairs d'éléments antipodaux, B_1 a 15 éléments.
  — B_2 : Les éléments non triviaux d'un stabilisateur d'un élément de Ω_2. Ces éléments sont d'ordre 3 car $n_2 = 3$ est premier, et les sous-groupes qu'ils engendrent sont conjugués car stabilisateurs d'éléments d'une même orbite. On a $\omega_2 = 20$ et comme l'orbite contient des pairs d'éléments antipodaux, B_2 a 20 éléments.
  — B_3 : De même avec Ω_3. On a $n_3 = 5, \omega_3 = 12$ et B_3 a 24 éléments.

  On a bien une partition car le total des cardinaux donne 60. Un sous-groupe distingué est nécessairement une union de certaines partie de cette partition, dont B_0. On peut calculer qu'aucun des ordres obtenus ne vérifie le théorème de Lagrange, sauf pour les sous-groupes distingués triviaux. Ainsi G est simple d'ordre 60, donc isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.
— Il est impossible d'avoir $n_1 = 2, n_2 = 3$ et $n_3 \geq 6$, sinon la somme des inverses seraient inférieure à 2, contredisant 4.

$\square$

On peut donner une interprétation géométrique de ces différents sous-groupes.

— Le groupe diédral est le groupe d'isométries directes d'un polygone régulier inscrit dans un grand cercle de la sphère. C'est même le groupe d'isométrie directes de deux polygones duaux : l'un a pour sommets les éléments de Ω_1, l'autre ceux de Ω_2. On passe d'un polygone à l'autre en prenant les milieux des côtés et en normalisant.
— Le groupe $\mathfrak{A}_4$ est le groupe des isométries directes de deux tétraèdres réguliers duaux inscrits dans la sphère. L'un a pour sommets les éléments de Ω_2, l'autre ceux de Ω_3. Les éléments de Ω_1 sont les milieux normalisés des cotés de n'importent lequel des deux tétraèdres. On passe d'un tétraèdre à l'autre en normalisant les centres des faces.
— Le groupe $\mathfrak{S}_4$ est le groupe des isométries directes d'un cube et d'un octaèdre régulier duaux inscrits dans la sphère. Le premier a pour sommets les éléments de Ω_2, l'autre ceux de Ω_3. Les éléments de Ω_1 sont les milieux normalisés des cotés de n'importent lequel des deux polyèdre. On passe d'un polyèdre à l'autre en normalisant les centres des faces.
— De même avec $\mathfrak{A}_5$, avec un dodécaèdre de sommets Ω_2, un icosaèdre de sommets Ω_3, des côtés de milieu Ω_1.

Enfin, on peut remarquer que deux sous-groupes finis isomorphes de SO(3) sont conjugués. Cela résulte de la transitivité de l'action de SO(3) sur certains objets (par exemple les droites dans le cas des D_n, ou les tétraèdres réguliers inscrits dans la sphère dans le cas de $\mathfrak{A}_4$). Cela permet de considérer, par exemple, "l'action de $\mathfrak{A}_4$ sur la sphère" sans que l'ambiguïté ne pose de problème, dans la plupart des cas.

1.3 Quotients de $\hat{\mathbb{C}}$

Nous avons identifié les sous-groupes G finis de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Un tel groupe agit de manière holomorphe sur la sphère de Riemann. Comme G est fini, cette action est proprement discontinue. Il manque une condition pour pouvoir munir $\hat{\mathbb{C}}/G$ d'une structure de surface de Riemann : que l'action de G soit libre.

Ce n'est jamais le cas lorsque G n'est pas trivial. Cependant, l'ensemble des points fixes F est fini. Ainsi, $\hat{\mathbb{C}} \setminus F$ est ouvert, et G y agit holomorphiquement, librement, de manière proprement discontinue. Le quotient $Q = (\hat{\mathbb{C}} \setminus F)/G$ est alors une surface de Riemann, et l'application de passage au quotient Π est un revêtement. On peut affiner la description de la structure de ce quotient. On définit au préalable la notion de structure projective, définie dans [2].

Définition 1. *Une* carte projective *sur une variété topologique S de dimension 2 est un triplet (U, f, V) composé d'un ouvert U de S, d'un ouvert V de $\hat{\mathbb{C}}$ et d'un homéomorphisme $f : U \to V$*

Un atlas projectif *sur S est un ensemble de cartes projectives (U, f, V) sur S telles que les U recouvrent $\hat{\mathbb{C}}$, et si (U_1, f_1, V_1) et (U_2, f_2, V_2) sont deux cartes de l'atlas, alors $f_1 \circ f_2^{-1}$ est la restriction d'une transformation de Möbius directe sur les composantes connexes de l'ouvert où elle est définie.*

Une structure projective *sur S est la donnée d'un atlas projectif sur S maximal pour l'inclusion.*

Cette définition est similaire à celle d'une variété différentielle ou d'une surface de Riemann, la différence étant la destination des cartes et la condition locale imposée aux changements de cartes. De la même manière, le lemme de Zorn garantit l'existence d'une unique structure projective associée à un atlas (non nécessairement maximal), dans le sens où l'atlas maximal définissant cette structure projective contient l'atlas considéré.

Remarquons également qu'une variété munit d'une structure projective est dotée d'une structure de surface de Riemann sous-jacente. La surface de Riemann Q découle ainsi d'une structure projective : un atlas est donné par les sections holomorphes de Π sur des ouverts de Q.

2 Équation hypergéométrique de Gauss

Cette section est consacrée à une application des résultats de la section 1 à l'étude de l'équation hypergéométrique de Gauss. Les résultats présentés on été publiés par Schwarz [4], et une exposition plus moderne en est faite dans [3].

2.1 Monodromie

Définition 2. *L'*équation hypergéométrique *de Gauss de paramètre $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ est l'équation différentielle complexe d'inconnue v et de variable x :*

$$x(x-1)\frac{d^2v}{dx^2}+((\alpha+\beta+1)x-\gamma)\frac{dv}{dx}+\alpha\beta v=0 \tag{5}$$

Soit $S=\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ *et* $\Pi:\tilde{S}\to S$ *le revêtement fondamental de* S*. Une* solution *de l'équation 5 est une fonction holomorphe* $f:\tilde{S}\to\mathbb{C}$ *telle que pour tout* $x\in S$*, si on note* ϕ *une section de* Π *définie sur un voisinage ouvert de* x*, et* $v=f\circ\phi$*, l'égalité 5 est vérifiée en* x *(notons que cela ne dépend pas du choix de l'ouvert* U*).*

Une solution f *est dite* algébrique *s'il existe un polynôme* P *non nul à coefficients complexes à deux indéterminées tel que pour tout* $y\in\tilde{S}, P(f(y),\Pi(y))=0$.

Notre objectif est alors de répondre à la question suivante : à quelle condition sur α,β,γ toutes les solutions de l'équation 5 sont-elles algébriques ? Pour y répondre, nous aurons besoin de considérer d'une part la monodromie de l'équation, d'autre part les quotients de solutions.

Comme l'équation est linéaire de degré 2, l'espace des solutions E est de dimension 2, et pour tout $y\in\tilde{S}$, l'application :

$$\begin{array}{rccl}\iota_y: & E & \to & \mathbb{C}^2\\ & f & \mapsto & \left(v(\Pi(y)),\frac{dv}{dx}(\Pi(y))\right)\end{array}$$

est un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire (avec v défini à partir de x et f comme précédemment). Comme le groupe fondamentale $\pi_1(S,x)$ de S agit par monodromie sur $\Pi^{-1}(x)$, on obtient une représentation de $\pi_1(S,x)$ donnée par :

$$\begin{array}{rccl}\sigma_x: & \pi_1(S,x) & \to & \mathrm{GL}(E)\\ & \gamma & \mapsto & \iota_y^{-1}\circ\iota_{\gamma\cdot y}.\end{array}$$

Cette représentation est la *représentation de monodromie linéaire* de l'équation. Remarquons d'une part qu'elle ne dépend en fait pas du choix de l'antécédent y de x (d'où la notation σ_x), d'autre part que pour $x'\in S$, il existe un isomorphisme (donné par la conjugaison par un chemin allant de x vers x') $k:\pi(S,x)\to\pi(S,x')$ tel que $\sigma_x=\sigma_{x'}\circ k$ (en particulier les images de σ_x et $\sigma_{x'}$ sont égales).

Définition 3. *La* représentation de monodromie projective *de l'équation est la composée* ρ_x *de* σ_x *par le morphisme canonique* $\mathrm{GL}(E)\to\mathrm{PSL}(E)$*.*

Considérons f_1,f_2 deux solutions de l'équation 5 linéairement indépendantes. Elles fournissent alors une base de E, donc un isomorphisme linéaire de E vers $\mathbb{C}^2$, donc un isomorphisme de groupe Λ_{f_1,f_2} de $\mathrm{GL}(E)$ vers $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, et donc finalement un isomorphisme de groupe Δ_{f_1,f_2} de $\mathrm{PSL}(E)$ vers $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Il découle de la définition de la représentation de monodromie qu'en notant $w=\frac{f_1}{f_2}$ (qui est une fonction méromorphe sur $\tilde{S}$), on a pour tout $y\in\tilde{S},\gamma\in\pi_1(S,\Pi(y))$: $w(\gamma\cdot y)=(\Delta_{f_1,f_2}\circ\rho_{\Pi(y)})(w(y))$. Autrement dit, la représentation de monodromie projective décrit la manière dont l'action de monodromie fait varier le quotient de deux solutions.

Notons que les images de $\Lambda_{f_1,f_2}\circ\sigma_x$ et $\Delta_{f_1,f_2}\circ\rho_x$ ne dépendent pas de x mais dépendent de la base (f_1,f_2), cependant elles sont uniques à conjugaison près. On appelle *monodromie linéaire* et *monodromie projective* ces sous-groupes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ définis à conjugaison près. Cela nous permet de reformuler la question initiale en termes de monodromie projective.

Proposition 3. *Il y a équivalence entre :*

1. *toutes les solutions de l'équation 5 sont algébrique ;*
2. *le quotient de deux solutions indépendantes est algébrique ;*
3. *la monodromie projective est finie.*

Démonstration. $\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Les fonctions algébriques sont stables par quotient.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ La monodromie d'une fonction algébrique est finie, et la monodromie projective de l'équation est aussi celle du quotient de deux solutions.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ Cette implication est plus difficile à montrer. Elle fait appel à la théorie de Fuchs locale, de manière à pouvoir appliquer un critère de Riemann pour obtenir l'algébricité d'une fonction. □

2.2 Indices de l'équation

Pour étudier la monodromie projective, on doit changer l'expression des paramètres de l'équation.

Définition 4. *Les* indices *de l'équation 5 sont les valeurs* $\theta_0 = \gamma - 1, \theta_1 = \alpha + \beta - \gamma$ *et* $\theta_\infty = \alpha - \beta$.

Remarquons que les indices sont en bijection avec les paramètres de l'équation hypergéométrique : on peut donc considérer l'équation 5 comme directement paramétrée par ses indices (dans $\mathbb{R}^3$). Posons le groupe suivant :

$$\begin{aligned}\Gamma =&\{f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,|\exists \sigma \in \mathfrak{S}(\{0,1,\infty\}), s_0, s_1, s_\infty \in \{\pm\}, n_0, n_1, n_\infty \in \mathbb{Z},\\ &n_0 + n_1 + n_\infty \in 2\,\mathbb{Z} \text{ et } \forall \theta_0, \theta_1, \theta_\infty \in \mathbb{R},\\ &f(\theta_0, \theta_1, \theta_\infty) = (s_0\theta_{\sigma(0)} + n_0, s_1\theta_{\sigma(1)} + n_1, s_\infty\theta_{\sigma(\infty)} + n_\infty)\}.\end{aligned}$$

Ce groupe agit sur l'espace des indices $\mathbb{R}^3$.

Proposition 4. *Si les indices de deux équations hypergéométriques sont dans la même orbite sous l'action de* Γ*, elles ont la même monodromie projective.*

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour des transformations qui engendrent Γ.

- Le cas d'une permutation des indices est le plus facile : en effet, des changements de variables, qui ne changent pas la monodromie, permettent de permuter les pôles $\{0, 1, \infty\}$, et les indices associés.
- Le cas où l'on remplace un indice par son opposé se traite grâce à la théorie de Fuchs locale.
- La transformation $(\theta_0, \theta_1, \theta_\infty) \mapsto (-\theta_0 - 1, -\theta_1 - 1, -\theta_\infty)$ se traite par un changement d'inconnue dans l'équation de Riccati, une équation associée à l'équation hypergéométrique dont la monodromie coïncide avec la monodromie projective (de l'équation hypergéométrique).

□

Cette proposition permet de se ramener à un cas particulier où l'on pourra utiliser les théorème de géométrie de la section 1.

Proposition 5. *Toute équation hypergéométrique a la même monodromie qu'une équation hypergéométrique dont les indices vérifient* $0 \leq \theta_0 \leq \theta_1 \leq \theta_\infty$ *et* $\theta_1 + \theta_\infty \leq 1 + \theta_0$.

Démonstration. On utilise la proposition 4. Grâce aux translations, on se ramène au cas où les indices sont dans $[-1,1]$. Avec le changement de signe, on peut même supposer les indices dans $[0,1]$. On applique à présent soit l'identité, soit $(\theta_0, \theta_1, \theta_\infty) \mapsto (1-\theta_0, 1-\theta_1, \theta_\infty)$, $(\theta_0, \theta_1, \theta_\infty) \mapsto (1-\theta_0, \theta_1, 1-\theta_\infty)$ ou $(\theta_0, \theta_1, \theta_\infty) \mapsto (\theta_0, 1-\theta_1, 1-\theta_\infty)$ de manière à minimiser la somme des indices. On applique une permutation de manière à ordonner les indices. Par l'absurde, supposons $\theta_1 + \theta_\infty > 1 + \theta_0$. Posons $(\theta'_0, \theta'_1, \theta'_\infty) = (\theta_0, 1-\theta_1, 1-\theta_\infty)$. Alors $\theta'_0 + \theta'_1 + \theta'_\infty = 2 + \theta_0 - \theta_1 - \theta_\infty < 1 < \theta_1 + \theta_\infty \leq \theta_0 + \theta_1 + \theta_\infty$ ce qui contredit la minimalité de la somme. □

Pour lier la monodromie projective à des considérations géométriques sur la sphère de Riemann, nous devons définir la notion de triangle sur $\hat{\mathbb{C}}$.

Définition 5. *Un* triangle *de* $\hat{\mathbb{C}}$ *est un ouvert simplement connexe dont le bord est composé de trois arcs de cercles formant une courbe de Jordan, et dont les trois sommets sont distincts. Un triangle est* sphérique *si les trois arcs de cercles sont des arcs de grands cercles.*

On définit la mesures des angles d'un triangle avec la structure conforme de la sphère de Riemann. Les triangles servent à l'étude de l'équation hypergéométrique via la proposition suivante.

Proposition 6. *Soit* $0 \leq \theta_0 \leq \theta_1 \leq \theta_\infty$ *tels que* $\theta_1 + \theta_\infty \leq 1 + \theta_0$*. Alors il existe un triangle de* $\hat{\mathbb{C}}$ *dont les angles ont pour mesures* $\theta_0\pi, \theta_1\pi$ *et* $\theta_\infty\pi$*. De plus, si* $w = \frac{f_1}{f_2}$ *est le quotient de deux solutions indépendantes de l'équation* 5*, avec pour indices* $\theta_0, \theta_1, \theta_\infty$*, sur le demi-plan* $\mathbb{H}$ *(et non sur* $\tilde{S}$*), alors* w *est un biholomorphisme de* $\mathbb{H}$ *vers le triangle. De plus,* w *se prolonge en un homéomorphisme de* $\overline{\mathbb{H}}$ *vers l'adhérence du triangle, et sa valeur en* 0 *(resp.* 1*,* ∞*) est le sommet d'angle* $\theta_0\pi$ *(resp.* $\theta_1\pi$*,* $\theta_\infty\pi$*).*

Démonstration. Ce théorème résulte d'une étude de Schwarz sur l'uniformisation des domaines polygonaux. □

Le triangle obtenu est lié à la monodromie projective via la proposition qui suit.

Proposition 7. *Dans le cadre de la proposition précédente, soit* H *le groupe engendré par les réflexions par rapport aux côté du triangle. Alors la monodromie projective est* $H \cap \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ *(à conjugaison près).*

Démonstration. On considère un point de base y de $\mathbb{H}$. Par le théorème de van Kampen, le groupe $\pi_1(S, y)$ est engendré par les deux lacets suivant. Le premier, γ_1, coupe l'axe réel deux fois : une première fois dans l'intervalle $]0,1[$, une deuxième fois dans l'intervalle $]1,+\infty[$. Le deuxième, γ_2, coupe l'axe réel deux fois : une première fois dans l'intervalle $]0,1[$, une deuxième fois dans l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$.

Soit w un quotient de deux solutions sur $\mathbb{H}$. D'après le théorème 6, w envoie $\mathbb{H}$ sur un triangle T, avec un prolongement par continuité qui envoie $[0,1]$ sur un côté c_1, $[1,+\infty[$ sur un côté c_2 et $\mathbb{R}_-$ sur un côté c_3. On pose r_1, r_2, r_3 les réflexions par rapport à ces côtés.

Comme $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ agit transitivement sur les cercles, il existe $a \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ tel que $a(c_1) \subset \mathbb{R}$. On applique alors le principe de réflexion de Schwarz (un corollaire classique du critère de Morera) à la fonction $a \circ w$, pour prolonger w en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}_- \cup [1, +\infty[)$, et on obtient que l'image de $x \in \mathbb{R} + i\,\mathbb{R}_-^*$ par ce prolongement est $r_1(w(\overline{x}))$.

Notons w_1 la fonction méromorphe obtenue sur $\mathbb{R} + i\,\mathbb{R}_-^*$ par prolongement. De manière à suivre le chemin γ_1, on doit à présent prolonger w_1 sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 1]$. Comme précédemment, on applique le théorème de réflexion de Schwarz : l'image de $x \in \mathbb{H}$ par le prolongement est $r(w_1(\overline{x}))$. La fonction r est la réflexion par rapport à un côté du nouveau triangle considéré, $r_1(T)$. Le côté en question est $r_1(c_2)$. Par conséquent, $r = r_1 r_2 r_1^{-1}$.

Ainsi la monodromie de w suivant γ_1 est $(r_1 r_2 r_1^{-1}) r_1$, soit $r_1 r_2$. De même, la monodromie projective suivant γ_2 est $r_1 r_3$. Comme les réflexions sont d'ordre 2, la monodromie projective, engendrée par $r_1 r_2$ et $r_1 r_3$, est le groupe des produits d'un nombre pair de réflexions r_1, r_2, r_3.

Les réflexions sont des transformations de Möbius qui ne sont pas directes, donc pas dans le groupe de Möbius $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Ce dernier est d'indice 2 dans le groupe de toutes les transformations de Möbius. Donc le groupe de monodromie projective est précisément l'intersection du groupe engendré par r_1, r_2, r_3 et de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. □

2.3 Liste de Schwarz

On peut à présent appliquer les résultats de la section 1 sur les sous-groupes finis de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Proposition 8. *Soit H le groupe engendré par les réflexions par rapport à un côté d'un triangle T de $\hat{\mathbb{C}}$. Si $H \cap \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ est fini, alors il existe $f \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ tel que l'image de H par f est un triangle sphérique.*

Démonstration. On peut appliquer le théorème 1 : il existe $f \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ tel que le conjugué de $H \cap \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ par f est inclus dans $\mathrm{SO}(3)$. Alors fHf^{-1} est engendré par les réflexions par rapport aux cotés de $f(T)$, et le conjugué de $H \cap \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ par f est égal à $fHf^{-1} \cap \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Il reste à montrer que si U est un triangle, I est le groupe engendré par les réflexions r_1, r_2, r_3 par les côté c_1, c_2, c_3 de U et $I \cap \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \subset \mathrm{SO}(3)$, alors U est sphérique. Les points fixes d'une réflexion sont les points du cercle qui la définit. La composée de deux réflexions a au moins pour points fixes l'intersection des cercles définissant les deux réflexions.

Comme c_1 et c_2 sont deux côtés d'un triangle, ils ont (au moins) un point d'intersection. Si les deux cercles qui les incluent n'ont pas d'autre point d'intersection, on peut envoyer leur unique point d'intersection à l'infini par un élément de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Les deux cercles donnent alors deux droites réelles affines parallèles distinctes sur $\mathbb{C}$, les réflexions sont des réflexions affines par rapport à ces droites, le produit des deux réflexions est une translation non triviale. Cela contredit le fait que $H \cap \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ est fini.

Ainsi les deux cercles ont deux points d'intersection. Ces points d'intersection sont les points fixes d'un élément non neutre de $\mathrm{SO}(3)$ (le produit des deux réflexions) : ils sont donc antipodaux. Comme les cercles contiennent deux points antipodaux, ce sont des grands cercles. Ainsi U est sphérique. □

On peut finalement répondre à la question initiale.

Théorème 3 (Liste de Schwarz)**.** *Une équation hypergéométrique a toutes ses solutions algébriques si et seulement si ses indices sont dans l'orbite, par l'action de Γ, de l'un des triplets du tableau suivant.*

Indices	*Monodromie*
$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{k}{n}\right), 1 \leq k < n$	D_n
$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$	$\mathfrak{A}_4$
$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right), \left(\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$	$\mathfrak{S}_4$
$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right), \left(\frac{2}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),$ $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right), \left(\frac{1}{2},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right),$ $\left(\frac{3}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right), \left(\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right),$ $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right), \left(\frac{4}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right),$ $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{5},\frac{1}{3}\right), \left(\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{3}\right)$	$\mathfrak{A}_5$

Démonstration. Ce théorème résulte d'une part de la proposition précédente, d'autre part du théorème 2. Le travail consiste à identifier les mesures d'angle possibles pour qu'il existe un pavage de la sphère par des triangle sphérique ayant ces mesures d'angle, et tel que le groupe des produits de deux réflexions par des arrêtes du pavage soit un groupe fixé parmi ceux de la liste du théorème 2. □

Finalement, on peut remarquer dans ces cas que les quotients de solutions $w : \tilde{S} \to \hat{\mathbb{C}}$ induisent une fonction holomorphe $z : S \to \hat{\mathbb{C}}/A$ avec A le groupe de monodromie projective (fini). On peut montrer que z transporte alors sur S la structure projective définie sur Q à la fin de la section 1. On obtient ainsi différentes structures projectives sur S.

Références

[JS87] Gareth A Jones et David Singerman. *Complex functions : an algebraic and geometric viewpoint.* Cambridge university press, 1987.

[LM07] Frank Loray et David Marìn. "Projective structures and projective bundles over compact Riemann surfaces". In : *arXiv preprint arXiv :0706.3608* (2007).

[Sai10] Henri Paul de Saint-Gervais. *Uniformisation des surfaces de Riemann : retour sur un théorème centenaire.* ENS, 2010.

[Sch73] Hermann A Schwarz. "Über diejenigen fälle in welchen die Gaussische hypergeometrische reihe einer algebraische funktion iheres vierten elementes darstellit". In : *Crelle J* 75 (1873), p. 292-335.