Analyse numérique

Semestre 1
2025 - 2026

TP noté

28 novembre 2025

Exercice 1 : Une équation différentielle explosive

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle d'inconnue x :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax^2. \tag{1}$$

Méthode d'Euler explicite

1. Écrire une fonction de prototype :

```
def etape(xn, dt, a):
```

qui retourne le résultat d'une étape de la méthode d'Euler explicite appliquée à l'équation (1), en partant de la valeur `xn`, avec un pas de temps `dt`, pour $a =$ `a`.

2. Écrire une fonction de prototype :

```
def euler_exp(x0, n, dt, a):
```

qui retourne la liste $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des valeurs obtenues avec les `n` premières étapes de la méthode d'Euler explicite appliquée à l'équation (1), en partant de la valeur `x0`, avec un pas de temps `dt`, pour $a =$ `a`.

Cas a strictement positif

3. Afficher un graphique avec en abscisse le temps t et en ordonnée la solution de (1) approchée par la fonction `euler_exp`, avec `x0` $= 1$, `n` $= 13$, `dt` $= 0.1$ et `a` $= 1$.

4. Afficher sur le graphique précédent le graphe de la solution exacte :

$$x : \begin{array}{rcl} [0,1[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{1-t}. \end{array}$$

5. Si l'on cherchait une solution approchée avec la méthode d'Euler implicite pour les valeurs de la question 3, on obtiendrait une erreur. Expliquer brièvement pourquoi (sans démonstration ni calcul).

Cas a négatif

6. Écrire une fonction de prototype :

   ```python
   def euler_imp(x0, n, dt, a):
   ```

   qui retourne la liste $x_0, x_1, \dots, x_n$ des valeurs obtenues avec les `n` premières étapes de la méthode d'Euler implicite appliquée à l'équation (1), en partant de la valeur `x0`, avec un pas de temps `dt`, pour $a =$ `a`.
   On pourra utiliser la fonction `fsolve` *du package* `scipy.optimize` *(on peut aussi faire autrement).*

7. On considère les valeurs `x0` $= 1$, `n` $= 20$, `dt` $= 0.1$ et `a` $= -1$. Afficher sur un même graphique :
   - la solution approchée par la méthode d'Euler explicite ;
   - la solution approchée par la méthode d'Euler implicite ;
   - la solution exacte :
   $$x : \begin{array}{rcl} [0,2] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{1}{1+t}. \end{array}$$

Exercice 2 : Pendule simple amorti

Régime libre

L'équation du pendule simple amorti libre est une équation différentielle d'ordre 2 d'inconnue θ :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -2\lambda\omega\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} - \omega^2\sin(\theta) \tag{2}$$

avec $\lambda, \omega \in \mathbb{R}_+^*$. En posant $v = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$, on constate que résoudre l'équation (2) équivaut à résoudre le système d'équations différentielles d'ordre 1 d'inconnues θ et v suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} & = v \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} & = -2\lambda\omega v - \omega^2\sin(\theta). \end{array}\right. \tag{3}$$

1. Écrire une fonction de prototype :

   ```python
   def pendule_libre (theta0, v0, n, dt, omega, lamb):
   ```

   qui retourne les deux listes $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n$ et $v_0, v_1, \dots, v_n$ des valeurs obtenues avec les `n` premières étapes de la méthode d'Euler explicite appliquée à l'équation (3), en partant des valeurs `theta0` et `v0`, avec un pas de temps `dt`, pour $\omega =$ `omega` et $\lambda =$ `lamb`.

2. Afficher le résultat sur un graphique avec θ en abscisse et v en ordonnée pour les valeurs `theta0` $= 1$, `v0` $= 0$, `n` $= 10\,000$, `dt` $= 0,01$, `omega` $= 1$, `lamb` $= 0,1$.

3. Qu'observe-t-on si l'on utilise un pas de temps trop grand ?

Régime forcé

L'équation du pendule simple amorti forcé est obtenue à partir de l'équation (2) en ajoutant le terme $a\sin(\sqrt{1-\lambda^2}\omega t)$ au membre de droite, pour un $a \in \mathbb{R}_+^*$. Comme précédemment, résoudre cette équation équivaut à résoudre le système d'équations différentielles d'ordre 1 d'inconnues θ et v suivant :

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} & = v \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} & = -2\lambda\omega v - \omega^2\sin(\theta) + a\sin(\sqrt{1-\lambda^2}\omega t). \end{array}\right. \tag{4}$$

4. Si l'on applique une méthode de résolution numérique en partant de $t = 0$ avec un pas de temps Δt, quelle est la valeur de t après n étapes (pour $n \in \mathbb{N}$) ?
5. En utilisant la méthode d'Euler explicite avec un pas de temps $\Delta t = 0,01$, afficher la trajectoire de la solution de l'équation (4) sur un graphique avec θ en abscisse et v en ordonnée pour les valeurs $\theta(0) = 1$, $v(0) = 0$, $\omega = 1$, $\lambda = 0,05$ et $a = 0,7$, pour t allant de 0 à 150.
6. Afficher θ en fonction de t.