Valeurs d'adhérence de la suite $\cos(n)$

Quel est le $\inf$**,** $\sup$**,** $\liminf$**,** $\limsup$ **de la suite de terme général** $\cos(n)$ **?**

Questions intermédiaires :

1. Soit $A := \{n + 2\pi m, n, m \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que pour tous $a, b \in A, k \in \mathbb{Z}$, on a $a + b \in A, a - b \in A, ka \in A$.
2. Soit $B := A \cap \mathbb{R}_+^*$. En utilisant l'irrationalité de π, montrer que $\inf B = 0$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite strictement croissante d'éléments de $A \cap [x - 1, x[$ qui tend vers x.
4. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite de terme général $\cos(n)$ est $[-1, 1]$.
5. Conclure : Quel est le $\inf$, $\sup$, $\liminf$, $\limsup$ de la suite de terme général $\cos(n)$?

1 Soit $A := \{n + 2\pi m, n, m \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que pour tous $a, b \in A, k \in \mathbb{Z}$, on a $a + b, a - b \in A, ka \in A$.

Solution

Soit $n, m, n', m', k \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$\begin{aligned}
&(n + 2\pi m) + (n' + 2\pi m') = (n + n') + 2\pi(m + m') \in A, \\
&k(n + 2\pi m) = kn + 2\pi km \in A.
\end{aligned}$$

Enfin si $a, b \in A$, on a $a - b = a + (-1)b \in A$ avec ce qui précède.

Remarque

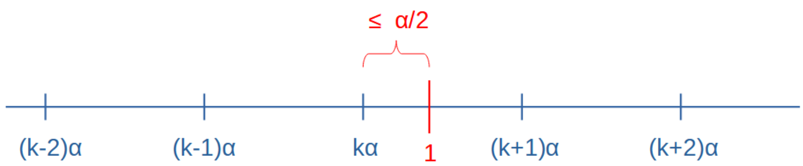
Une partie non vide de $\mathbb{R}$ qui vérifie ces propriétés est appelée *sous-groupe* de $\mathbb{R}$.

2 Soit $B := A \cap \mathbb{R}_+^*$. En utilisant l'irrationalité de π, montrer que $\inf B = 0$.

Explication

On veut obtenir une suite d'éléments de B qui tend vers 0. On peut la construire par récurrence en montrant le fait suivant : pour tout $\alpha \in B$, B contient un élément au moins deux fois plus petit que α. Voilà comment on peut procéder pour le montrer.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k\alpha$, qu'on appellera un *multiple* de α, est dans A. On regarde les deux multiples de α les plus proches de 1 : on a $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k\alpha \leq 1 < (k+1)\alpha$. Comme l'écart entre ces deux multiples est α, on sait que 1 est à une distance inférieure à $\frac{\alpha}{2}$ de l'un d'entre eux. Comme 1 est aussi dans A, leur différence est dans A : on a gagné.



À un détail près : si $k\alpha = 1$, alors la différence est égale à 0, que l'on a exclu de la définition de B. Dans ce cas, on recommence, mais avec 2π (aussi dans A) à la place de 1. Si on a le même problème, c'est que l'on a $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $1 = k\alpha$ et $2\pi = k'\alpha$. Mais alors $\alpha = \frac{1}{k}$ donc $\pi = \frac{k'}{2k}$, ce qui est absurde car π est irrationnel.

Solution détaillée

Montrons que 0 est la borne inférieure de B. Comme $B \subset \mathbb{R}_+^*$, 0 est un minorant de B. Il suffit alors de construire par récurrence une suite (α_n) d'éléments de B qui tend vers 0. On pose $\alpha_0 = 1$.

Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}$, on ait défini α_n. Définissons α_{n+1}. Posons $q := 1/\alpha_n$ et $q' := 2\pi/\alpha_n$. Alors q et q' ne peuvent pas être entier simultanément, sinon $\pi = \frac{q'}{2q}$ contredit l'irrationalité de π. Quitte à remplacer "1" par "2π" dans la suite, on suppose que q n'est pas entier.

Soit k la partie entière de q, on a $k < q < k+1$ donc $k\alpha_n < 1 < (k+1)\alpha_n$. Alors soit $1 - k\alpha_n$, soit $(k+1)\alpha_n - 1$ est inférieur ou égal à $\frac{\alpha_n}{2}$ (sinon on aurait $\alpha_n = (k+1)\alpha_n - k\alpha_n = ((k+1)\alpha_n - 1) + (1 - k\alpha_n) > 2\frac{\alpha_n}{2} = \alpha_n$, ce qui est absurde). On le choisit en tant que α_{n+1}. Il est bien dans B d'après la question 1.

Montrons enfin que la suite tend vers 0. Montrons d'abord par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\alpha_n \leq \frac{1}{2^n}$. Pour $n = 0$, on a $\alpha_0 = 1 = \frac{1}{2^0}$. Supposons l'inégalité vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &\leq \frac{\alpha_n}{2} \\ &\leq \frac{1/2^n}{2} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence. Enfin, comme la suite est à termes positifs d'une part, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ d'autre part, par théorème des gendarmes, (α_n) tend vers 0.

Remarque

On montre de la même manière le résultat plus général suivant : tout sous-groupe G de $\mathbb{R}$ vérifie l'une des deux propriétés suivantes (et pas l'autre) :

— il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $G = \alpha\,\mathbb{Z} := \{k\alpha, k \in \mathbb{Z}\}$;

— la borne inférieure de $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est 0.

3 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite strictement croissante d'éléments de $A \cap [x-1, x[$ qui tend vers x.

Explication

Pour $x \in \mathbb{R}$, on construit par récurrence une suite (y_n) strictement croissante d'éléments de A qui tend vers x. On peut définir y_0 simplement comme le plus grand entier strictement inférieur à x. Pour définir y_{n+1}, on veut respecter trois inégalités :

— $y_{n+1} > y_n$ pour avoir une suite strictement croissante ;

— $x - \frac{1}{n+2} \leq y_{n+1} < x$ pour avoir une suite qui converge vers x par théorème des gendarmes.

Pour un élément α de B, il existe un multiple de α qui vérifie ces critères, à conditions que α soit suffisamment petit. Cela tombe bien, la question 2 nous donne des éléments de B aussi petits que l'on veut.

Solution détaillée

Soit $x \in \mathbb{R}$, construisons par récurrence une suite (y_n) strictement croissante d'éléments de A tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x - \frac{1}{n+1} \leq y_n < x$. On pose y_0 le plus grand entier strictement inférieur à x. On a bien $y_0 \in \mathbb{Z} \subset B$ et $x - 1 \leq y_0 < x$.

Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}$, on ait défini y_n vérifiant les inégalités voulues. Définissons y_{n+1}. Comme $y_n < x$, on a $m := \min\{x - y_n, \frac{1}{n+2}\} > 0$. D'après la question 2, il existe $\alpha \in B$ tel que $\alpha < m$. Soit k le plus grand entier strictement inférieur à $\frac{x}{\alpha}$, afin que $\frac{x}{\alpha} - 1 \leq k < \frac{x}{\alpha}$. Alors $x - m < x - \alpha \leq k\alpha < x$. On pose $y_{n+1} := k\alpha$: d'après la question 1, il est bien dans A, et par définition de m, on a $y_{n+1} > y_n$ et $x - \frac{1}{n+2} \leq y_{n+1} < x$.

La suite (y_n) est une suite strictement croissante d'éléments de A. De plus, l'encadrement $x - \frac{1}{n+1} \leq y_n < x$ montrent que ses termes sont dans $[x-1, x[$. Enfin, $\lim_{n \to +\infty} x - \frac{1}{n+1} = x$, donc par théorème des gendarmes, (y_n) converge vers x.

Remarque

Une partie F de $\mathbb{R}$ est dite *dense* dans $\mathbb{R}$ si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de F qui converge vers x. Par exemple, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, mais $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}_+$ ne sont pas denses dans $\mathbb{R}$.

On peut montrer que si $F \subset \mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe plus précisément une suite strictement croissante d'éléments de $F \cap [x-1, x[$ qui tend vers x.

Avec la même méthode que pour cette question, on peut reformuler ainsi la remarque de la question 2 : tout sous-groupe G de $\mathbb{R}$ vérifie l'une des deux propriétés suivantes (et pas l'autre) :

— il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $G = \alpha\,\mathbb{Z}$;

— G est dense dans $\mathbb{R}$.

4 Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite de terme général $\cos(n)$ est $[-1, 1]$.

Explication

Soit $z \in [-1, 1], x := \text{Arccos}(z)$. La question 3 nous donne deux suites d'entiers $(n_i), (m_i)$ telles que $y_i = n_i + 2\pi m_i$ tend vers x quand i tend vers $+\infty$. Comme le sinus est continu et 2π-périodique, $\sin(n_i)$ tend vers z quand i tend vers $+\infty$. Par parité de cos, on peut prendre $|n_i|$ à la place de n_i pour avoir des entiers positifs. Mais pour qu'on ait vraiment une suite extraite, il faudrait que $i \mapsto |n_i|$ soit une fonction extractrice, c'est à dire qu'elle soit strictement croissante.

On peut commencer par remarquer que, si on définit bien (n_i) (et (m_i)) à partir de (y_i) défini à la question 3, alors (n_i) ne prend pas deux fois la même valeur. En effet, dans le cas contraire, si on a $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $n_i = n_j$, alors on a aussi $m_i = m_j$ car sinon l'écart entre y_i et y_j serait trop grand (supérieur à 2π, alors que les deux sont dans $[x-1, x[$). Mais alors $y_i = y_j$, et donc $i = j$ par croissance stricte.

Finalement, on peut remarquer que si on a une suite d'entiers naturels tous distincts, on peut en extraire une suite strictement croissante.

Solution détaillée

Soit $z \in [-1, 1]$, construisons par récurrence une fonction extractrice φ telle que $\cos(\varphi(a))$ tend vers z quand a tend vers $+\infty$. Soit $x := \text{Arccos}(z)$. D'après la question précédente, on a deux suites d'entiers (n_i) et (m_i) tels que la suite $(y_i) := (n_i + 2\pi m_i)$ est à termes dans $[x-1, x[$, croit strictement, et converge vers x.

Montrons que pour $i, j \in \mathbb{N}$, si $n_i = n_j$, alors $i = j$. D'une part, on a $|y_j - y_i| < 1 < 2\pi$ car tous les termes de la suite sont dans $[x-1, x[$. D'autre part, $y_j - y_i = 2\pi(m_j - m_i)$. Comme m_i et m_j sont entiers, on en déduit $m_i = m_j$, donc $y_i = y_j$, donc par croissance stricte, $i = j$.

On pose $\varphi(0) = 0$. Supposons que l'on ait défini $\varphi(a)$ pour un $a \in \mathbb{N}$, définissons $\varphi(a+1)$. Il existe $I \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \geq I$, on ait $|y_i - x| \leq \frac{1}{a+1}$. Comme tous les n_i sont distincts, ils prennent une infinité de valeurs différentes, donc il existe $i_{a+1} \geq I$ tel que $|n_{i_{a+1}}| > \phi(a)$. On pose $\phi(a+1) := |n_{i_{a+1}}|$. Alors ϕ est bien une fonction extractrice.

Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on a $|y_{i_a} - x| \leq \frac{1}{a}$, donc y_{i_a} tend vers x lorsque a tend vers $+\infty$. Par continuité du cosinus, $\cos(y_{a_i})$ tend vers z. Comme le cosinus est 2π-périodique et pair, on a $\cos(y_{a_i}) = \cos(n_{a_i}) = \cos(|n_{a_i}|) = \cos(\phi(a))$. On a donc une sous suite de $(\cos(a))_a$ qui tend vers z, donc z est une valeur d'adhérence.

Enfin, dans l'autre sens, comme le cosinus est à valeur dans $[-1, 1]$, par passage à la limite des inégalités larges, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite considérée est inclus dans $[-1, 1]$. Donc l'ensemble des valeur d'adhérences est $[-1, 1]$.

Remarque

Avec le sinus à la place du cosinus, on ne plus utiliser l'argument de la parité. Mais la conclusion reste vraie : il faut changer un peu l'exercice, ce qui le rend un peu plus difficile mais pas vraiment plus intéressant.

5 Conclure : Quel est le $\inf$, $\sup$, $\liminf$, $\limsup$ de la suite de terme général $\cos(n)$?

Solution

La $\liminf$ et la $\limsup$ sont le minimum et le maximum de l'ensemble des valeurs d'adhérence, donc -1 et 1. Comme la suite est minorée par -1 et majorée par 1, on a $-1 \leq \inf_n \cos(n) \leq \liminf_n \cos(n) = -1$ et $1 = \limsup_n \cos(n) \leq \sup_n \cos(n) \leq 1$ donc $\inf_n \cos(n) = -1$ et $\sup_n \cos(n) = 1$.