Leçon 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Développements :

Isométries du tétraèdre et du cube, Nb d'automorphismes diagonalisables sur un corps fini.

Bibliographie :

Ulmer, H2G2 Nouvelles histoires tome 1, Calais,

Plan

Soit G un groupe et X un ensemble

1 Théorie

1.1 Notions d'action de groupe

Définition 1 (Ulm p.27). Action de groupe à gauche

Remarque 2. Dans la suite, on ne considérera que des actions à gauche

Exemple 3 (Ulm p.28). $\mathfrak{S}(X)$, $\mathrm{GL}(V)$ sur V,

Proposition 4 (Ulm p.28). *Bijection entre action et morphisme*

Définition 5 (Ulm p.29-68). Orbite de x, stabilisateur de x, points fixes sous l'action de g, de G

Définition 6 (Ulm p.29-31). Librement, transitivement, fidèle

Exemple 7 (Ulm p.30). Pour l'action du groupe diédral sur le polygone

Proposition 8 (Ulm p.30). *Une action fournit une relation d'équivalence $\rightsquigarrow$ partition en orbites*

Application 9 (Ulm p.43). Décomposition des permutations en produit de cycles disjoints

Proposition 10 (Ulm p.67). *Bijection orbite/stabilisateur*

1.2 Action d'un groupe fini sur un ensemble fini

Ici, G et X sont finis

Proposition 11 (Ulm p.67). *Relation orbite/stabilisateur*

Application 12. Nombre d'automorphismes diagonalisables sur un corps fini.

Application 13. Nb d'automorphismes diagonalisables sur un corps fini

Corollaire 14 (Ulm p.68). *Formule des classes-Burnside*

Corollaire 15 (Ulm p.69). *Points fixes d'un p-groupe*

Application 16 (Ulm p.69). Thm de Cauchy

Application 17 (Ulm p.70). (attention, on en reparle dans opération par conjugaison) Centre d'un p-groupe

2 Premier exemple : action d'un groupe sur lui-même

2.1 Opération par translation

Définition 18 (Ulm p.31). translation à gauche

Proposition 19 (Ulm p.31). *Stabilisateur, orbite, fidèle etc*

Théorème 20 (Ulm p.31). *Théorème de Cayley*

Remarque 21 (Ulm p.31). Le problème est que le groupe symétrique est trop gros. On va diminuer le n :on utilise l'action de translation sur les classes à gauche

Proposition 22 (Ulm p.32). *Morphisme obtenu avec l'action sur les classes à gauche*

Exemple 23 (Ulm p.33).

Application 24 (Ulm p.25). Thm de Lagrange

Remarque 25 (H2G2 p.8 ou 16 ou Ulm p.38). Principe de conjugaison

2.2 Opération par conjugaison

Définition 26 (Ulm p.33). action de groupe par conjugaison

Exemple 27 (Ulm p.46). Conjugaison des permutations

Remarque 28 (Ulm p.34). Vocabulaire : classe de conjugaison, centralisateur

Proposition 29 (Ulm p.34)**.** *Jamais libre, pas transitive en général, lien avec "être dans le centre"*

Application 30 (Ulm p.71)**.** Centre d'un groupe d'ordre p^2

Exemple 31 (Ulm p.34)**.** (au moins, on sait ce qu'il faut montrer si on nous les demande..!) Classes de conjugaison de D_n

Proposition 32 (Ulm p.36)**.** *Sous groupes distingués lien avec action*

Remarque 33 (Ulm p.37). Vocabulaire : normalisateur

2.3 Théorèmes de Sylow

Ici les groupes sont finis

Définition 34 (Ulm p.85)**.** p-Sylow

Théorème 35 (Calais p.235)**.** *Théorèmes de Sylow et corollaires*

Exemple 36 (Calais p.243)**.** Un sg d'ordre 42 n'est pas simple

Application 37 (Calais p.240)**.** Un groupe d'ordre pq n'est pas simple

3 Actions de groupe en algèbre linéaire

3.1 Action des matrices

!!Attention à écrire des actions à gauche!!

3.1.1 Action par multiplication à gauche

[H2G2 p.209]

Définition 38. action par multiplication à gauche

Théorème 39. *Deux matrices sont dans la même orbite ssi elles ont le même noyau*

Exemple 40.

3.1.2 Equivalence de matrices

[H2G2 p.14]

Définition 41. équivalence de matrices

Remarque 42. lien avec les morphismes

Théorème 43. *equivalentes ssi elles ont même rang, donner la forme* $J_{m,n,r}$

Exemple 44.

3.1.3 Matrices semblables

[H2G2 p.122]

Définition 45. Relation de similitude

Remarque 46. Même endomorphisme dans deux bases différentes

Application 47. Lien avec la diagonalisation des matrices

Théorème 48. *Deux matrices sont semblables ssi elles ont les mêmes invariants de similitude. Donner la forme de Frobenius*

Exemple 49.

3.1.4 Matrices congruentes

[H2G2 p.250]

Définition 50. Congruence des matrices

Remarque 51. Deux matrices congruentes ssi même forme quadratique dans 2 bases différentes

Théorème 52. *Classification sur* $\mathbb{C}$

Théorème 53. *Classification sur* $\mathbb{R}$

3.2 Théorie des représentations

[Ulm p.144]

Définition 54. représentation de groupes

Remarque 55. On obtient une action

Exemple 56. représentation triviale, par permutation, régulière

4 Actions de groupe en géométrie : groupe d'isométrie

Mercier

Proposition 57. *Isométries du tétraèdre et du cube*

Rajouter les espaces affines comme actions de groupes.