Leçon 106 : Groupe linéaire d'un ev de dimension finie E, sous groupes de $\mathrm{GL}(E)$.Applications.

Développements :

Théorème de Burnside, Nombre d'automorphismes diagonalisables sur un corps fini. Simplicité de $SO(3)$.

Bibliographie :

Szpirglas Mathématiques L3 Algèbre, Caldero Germoni Histoires hédonistes de groupes et de géométrie Tome 1 (H2G2), Perrin (P), OA

Plan

K un corps commutatif, E un K-ev de dim finie n.

1 Le groupe linéaire et le groupe spécial linéaire

1.1 Définitions et caractérisations

Définition 1 (S p.294)**.** groupe linéaire. Structure de groupe pour la composition des endomorphismes.
$\mathrm{GL}_n(K)$ et isomorphisme avec $\mathrm{GL}(E)$.

Remarque 2 (S p.294). Isomorphe à l'ensemble des matrices inversibles de taille n

Proposition 3 (S p.295)**.** *Caratérisation des éléments de* $\mathrm{GL}(E)$ *: avec noyau, det, image.*

Remarque 4 (S p.295). Faux en dimension infine !

Proposition 5 (sans réf)**.** *envoie une base sur une base*

Proposition 6 (S p.295)**.** *Cardinal de* $\mathrm{GL}(\mathbb{F}_q)$

Définition 7 (S p.296)**.** $\mathrm{SL}_n(K)$

Proposition 8 (S p.296)**.** *est distingué*

1.2 Générateurs

Lemme 9 (P p. 98)**.** *Si laisse invariantes toutes les droites vectorielles alors homothétie*

Définition 10 (S p.297)**.** dilatation

Proposition 11 (S p.297)**.** *Caractérisation des dilatations*

Définition 12 (S p.297)**.** réflexion

Définition 13 (S p.298)**.** transvection

Proposition 14 (S p.298)**.** *Caractérisation des transvections*

Proposition 15 (S p.300)**.** *Caractérisation des dilatations*

Théorème 16. $\mathrm{SL}_n(K)$ *engendré par transvections.* $\mathrm{GL}_n(K)$ *engendré par transvections et dilatations.*

2 Quelques sous-groupes particuliers

2.1 Centre et groupe dérivé

Théorème 17 (S p.302)**.** *Centre de* $\mathrm{SL}_n(K)$ *et* $\mathrm{GL}_n(K)$

Définition 18 (S p.302)**.** groupe projectif linéaire $\mathrm{PGL}_n(K)$ et $\mathrm{PSL}_n(K)$.

Théorème 19 (S p.302)**.** *Groupe dérivé de* $\mathrm{SL}_n(K)$ *et* $\mathrm{GL}_n(K)$

Et Perrin pour les cas particuliers

2.2 Groupe orthogonal

Ici $Car(K) \neq 2$.

Définition 20 (S p.314-323)**.** groupe orthogonal $O(E, q)$, isométrie. Muni du produit scalaire canonique et $K = \mathbb{R}$, on note $O_n(\mathbb{R})$

Proposition 21 (S p.314)**.** *Déf équivalente avec la forme polaire*

Remarque 22 (S p.314). équivalence avec écriture matricielle

Proposition 23 (S p.314)**.** $O(q)$ *implique* $det = \pm 1$.

Définition 24 (S p.315-323)**.** sg des isométries positives $SO(q)$. Muni du produit scalaire canonique et $K = \mathbb{R}$, on note $O_n(\mathbb{R})$

Exemple 25 (S p.315-316)**.** Symétrie, dilatation, renversement, symétrie orthogonale, réflexion orthogonale

Théorème 26 (S p.316-318)**.** $O(q)$ *engendré par les réflexions orthogonales (au plus* n*).* $SO(q)$ *engendré par les renversements (au plus* n*)*

Pour avoir des résultats supplémentaires quand muni du produit scalaire canonique et $K = \mathbb{R}$, voir S p. 323

2.3 Sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(K)$

Ici $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 27 (S p.308)**.** exposant d'un groupe

Théorème 28 (S p.308)**.** *Burnside*

Proposition 29 (S p.310)**.** $\mathrm{GL}_n(K)$ *ne possède pas de sous-groupes arbitrairement petits*

3 Actions de $\mathrm{GL}(E)$

3.1 Action sur les sev de E

$g.x = g(x)$

Proposition 30. GL *agit transitivement par translation à gauche sur* E

[H2G2 p.62] action : $g.F = g(F)$. espace quotient : $0, \cdots, n$, invariant : dimension rajouter le dvlpt sur le nombre d'automorphismes diagonalisables

3.2 Sur les espaces de matrices

3.2.1 Action par multiplication à gauche de GL_m sur $\mathcal{M}_{m,n}$

$P.A = PA$

Proposition 31 (H2G2 p.130)**.** *Deux matrices sont dans la même orbite ssi elles ont même noyau*

3.2.2 Action par équivalence de $\mathrm{GL}_m \times \mathrm{GL}_n$ sur $\mathcal{M}_{m,n}$

Définition 32 (H2G2 p.2)**.** équivalence

On considère l'action à gauche $(P, Q, A) \mapsto (P, Q).A = PAQ^{-1}$

Proposition 33 (H2G2 p.3)**.** *équivalentes ssi ont même rang*

Les orbites de l'action sont donc paramétrées par le rang.

3.2.3 Actions par conjugaison

Définition 34 (H2G2 p.84)**.** Matrice semblables

Action par conjuguaison de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur matrices diagonalisables, $K = \mathbb{C}$ [H2G2 p.62 et 84] $P.A = PAP^{-1}$. Invariant : valeurs propres

Proposition 35. *Deux matrices diagonalisables sont semblables ssi leurs valeurs propres avec multiplicité sont les mêmes.*

Proposition 36 (H2G2 p.85)**.** *Le polynôme caractéristique est un invariant de similitude*

Remarque 37 (H2G2 p.85)**.** Ce n'est pas le cas du polynôme minimal

Action par conjugaison de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur matrices carrées [H2G2 p.62 et 101] $P.A = PAP^{-1}$. Invariant : invariants de similitude

Théorème 38 (H2G2 p.106-107)**.** *Thm de Frobenius*

Proposition 39 (H2G2 p. 107)**.** *Deux matrices sont semblables ssi elles ont même facteur invariants*

3.2.4 Action par congruence

H2G2

4 Eléments de topologie

Bonus : H2G2 p.26 et suivantes

4.1 Densité

Proposition 40 (S p.310)**.** $\mathrm{GL}_n(K)$ *ouvert dense* $\mathcal{M}_n(K)$*,* $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$

Application 41 (S p.310)**.** Egalité des polynômes caractéristiques de MN et NM.

4.2 Connexité

Proposition 42 (S p.311-312)**.** $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *et* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ *sont connexes*

Définition 43 (S p.311)**.** $\mathrm{GL}+$ et $\mathrm{GL}-$

Proposition 44 (S p.313)**.** $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *a deux composantes connexes* $\mathrm{GL}+$ *et* $\mathrm{GL}-$.

Proposition 45 (S p.311)**.** *homéomorphisme entre* $\mathrm{GL}+$ *et* $\mathrm{GL}-$

Proposition 46 (S p.311)**.** *Homéomorphismes* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^* \times \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$*,* $\mathrm{GL}_n+(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^*+ \times \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$

Proposition 47 (S p.313)**.** $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ *est connexe*

Proposition 48 (S p.329)**.** $SO_n(\mathbb{R})$ *est connexe*

4.3 Compacité

Proposition 49 (S p. 328)**.** $O_n(\mathbb{R})$ *est compact*

Remarque 50 (S p. 328)*.* Faux en général

Application 51 (S p. 342)**.** décomposition polaire est un homéo

Proposition 52. $SO_n(\mathbb{R})$ *est compact*

Application 53. $SO(3)$ est simple.