

# Leçon 125 : Extensions de corps. Exemples et applications.

## Développements :

Irréductibilité des polynômes cyclotomiques, étude des polynômes irréductibles sur  $\mathbb{F}_q$ .

## Bibliographie :

Gozard(G) et Ulmer(U), Calais (C)

## Plan

### 1 Notion d'extension de corps

#### 1.1 Définitions et premières propriétés

**Définition 1** (G p.2). corps

**Définition 2** (G p.7). caractéristique d'un corps

**Définition 3** (U p. 163). extension de corps

*Remarque 4* (G p. 21). Lien sous corps/extension de corps

**Exemple 5** (G p. 21 ou C p.2). Tout corps de caractéristique nulle est extension de  $\mathbb{Q}$

**Définition 6** (C p. 4). sous extension engendrée par une partie

**Définition 7** (C p.4). extension simple

**Proposition 8** (C p.4). *adjonctions successives*

**Exemple 9** (C p.4).

**Proposition 10** (C p.4). *Ecriture extension simple*

*Remarque 11* (C p.4).  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$  est simple

#### 1.2 Degré d'une extension de corps

**Définition 12** (C p.6). degré de l'extension

*Remarque 13* (C p. 6).  $[K : k] = 1$  ssi  $k = K$

**Théorème 14** (C p.6 bonne écriture :G p. 22). *Base télescopique*

**Corollaire 15** (C p.6 bonne écriture :G p. 22). *Multiplicité du degré*

**Exemple 16.**

### 2 Extensions algébriques et transcendentes

#### 2.1 Nombres algébriques et transcendents

**Définition 17** (C p. 11). nombres algébriques et transcendents

**Exemple 18** (C p. 11).

**Proposition 19** (C p.11). *Caractérisation avec l'injectivité du morphisme*

**Théorème 20** (C p.12). *Cas des extensions simples transcendentes*

**Corollaire 21** (C p.12). *Deux extensions simples transcendentes d'un corps  $K$  sont isomorphes*

**Théorème 22** (C p.13). *Cas des extensions simples algébriques*

**Définition 23** (C p.13). polynôme minimal

**Théorème 24** (C p.15). *Caractérisation des extensions simples algébriques avec le polynôme minimal*

**Exemple 25** (C p.15).

**Théorème 26** (C p.16). *Isomorphisme entre extensions simples algébriques*

**Exemple 27** (C p.16).

#### 2.2 Extensions algébriques et transcendentes

##### 2.2.1 Extensions algébriques

**Définition 28** (C p.18). extension algébrique

**Proposition 29** (C p.18). *degré fini implique algébrique*

**Proposition 30** (C p.18). *algébrique de degré fini ssi adjonction d'un nb fini d'éléments*

**Proposition 31** (C p.20). *passage du caractère algébrique aux sous-extensions*

##### 2.2.2 Extensions transcendentes

**Définition 32** (C p.20). extension transcendente

**Proposition 33** (C p.20). *Lien avec le degré*

## 3 Adjonctions de racines

### 3.1 Corps de rupture

**Définition 34** (G p. 57). corps de rupture

**Théorème 35** (G p.57). *existence et unicité du corps de rupture*

**Proposition 36** (G p.58). *degré du corps de rupture et base*

**Exemple 37** (G p.58). Corps à 4 éléments

**Corollaire 38** (G p.58). *Il existe une extension dans laquelle un polynôme donné possède une racine*

**Proposition 39** (G p.59). *Critère irréductibilité polynôme et la prop d'après*

**Proposition 40.** *Berlekamp (à voir...)*

### 3.2 Corps de décomposition

**Définition 41** (G p. 59 ou C p.36). corps de décomposition

*Remarque 42.* C'est une extension algébrique de degré fini

**Exemple 43** (G p.60).

**Exemple 44** (G). Corps de décomposition différent d'un corps de rupture

**Théorème 45** (G p.60). *Existence et unicité + majoration du degré*

**Proposition 46** (C p.37). *Caractérisation avec les racines*

**Théorème 47** (G p.101 ou C p.46). *Thm de l'élément primitif*

## 4 Corps finis

Voir Leçon sur les corps finis G p.85