

Leçon 150 : Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Développements :

Nb d'automorphismes diagonalisables sur un corps fini ne marche pas : ce n'est pas une action SUR un espace de matrices

Réduction des endomorphismes normaux, Invariants de similitude

Bibliographie :

H2G2 Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries Tome 1, Gourdon Algèbre, OA

Plan

ATTENTION : adapter les notations pour écrire des actions à gauche!!

1 Action par translation

Motivation : Résoudre $AX = Y$

1.1 Invariant

Définition 1 (H2G2 p.203). Action par multiplication à gauche

Remarque 2. Action par multiplication à droite est le dual de ce problème

Remarque 3 (H2G2 p.202). C'est ce que fait le pivot de Gauss

Théorème 4 (H2G2 p.209). *invariant total : le noyau*

Remarque 5. Pour le trouver, on utilise un pivot de Gauss

Exemple 6.

1.2 Forme normale

Définition 7 (H2G2 p.204). Pivot, matrice échelonnée en lignes, réduite

Exemple 8 (H2G2 p.204).

Définition 9 (H2G2 p.204). Type

Exemple 10 (H2G2 p.204).

Théorème 11 (H2G2 p.209). *Forme normale : matrice échelonnée réduite en lignes*

Remarque 12. Pour la trouver, on utilise un pivot de Gauss

Exemple 13.

1.3 Action de O_n et de U_n

Théorème 14 (H2G2 p.348). *Décomposition polaire avec O_n*

Corollaire 15. *Racine carrée dans S_n^{++}*

Exemple 16.

Application 17 (H2G2 p. 351). Rayon spectral

Application 18 (H2G2 p.351). Maximalité du groupe orthogonal

Théorème 19 (H2G2 p.348). *Décomposition polaire avec U_n*

Application 20. ??

2 Action par équivalence

2.1 Orbites et rang

Définition 21 (H2G2 p.5). Action par équivalence

Remarque 22 (H2G2 p.3). Signification : changement de base pour un endomorphisme

Théorème 23 (H2G2 p.6). *Invariant : le rang*
Forme normale : $J_{m,n,r}$

Remarque 24. On utilise le pivot de Gauss

Application 25 (OA p.155). $Rg(A) = rg({}^tA)$

Application 26 (OA p.156). Deux matrices équivalentes dans un corps le sont dans tout sous corps

2.2 Topologie

Proposition 27 (OA p.155). *Densité de GL*

Proposition 28 (H2G2 p.11). *Adhérence de l'orbite de rang r*

Corollaire 29 (H2G2 p.12). *orbite fermée, ouverte*

Corollaire 30 (H2G2 p.12). *Rang et cv de matrices*

3 Action par conjugaison

3.1 Généralités

Définition 31 (H2G2 p.122). Action par conjugaison

Définition 32 (H2G2 p.122). Classe de similitude

Remarque 33. Lien avec la réduction

Proposition 34 (H2G2 p.147). *Deux matrices sont semblables sur \mathbb{C} ssi elles le sont sur \mathbb{R} .*

Corollaire 35 (H2G2 p.147). *Orbite d'une matrice réelle sur \mathbb{R} en fonction de l'orbite sur \mathbb{C}*

3.2 Action sur $D_n(\mathbb{C})$

Théorème 36 (H2G2 p.122). *bijection avec le spectre de la matrice*

Corollaire 37 (H2G2 p.123-142). *invariants : spectre ou polynôme caractéristique, forme normale*

Exemple 38.

Contre-exemple 39 (H2G2 p.123). Pas vrai avec le polynôme minimal

Proposition 40 (H2G2 p.124). *Pour \mathbb{C} , A est diagonalisable ssi son orbite est fermée*

3.3 Invariants de similitude

Proposition 41 (H2G2 p.148). *Polynôme minimal associé à u et x*

Proposition 42 (H2G2 p.149). *Il existe x tel que $\pi_u = \pi_{u,x}$*

Proposition 43 (H2G2 p.151). *Equivalences avec "être cyclique"*

Théorème 44 (H2G2 p.152). *Invariants de similitude*

Corollaire 45 (H2G2 p.154). *Frobenius*

Corollaire 46 (H2G2 p.155). *invariant : les invariants de similitude*

Corollaire 47 (H2G2 p.155). *Semblables sur un corps alors semblables sur un sous corps*

Algo : calcul des invariants (voir la feuille de Gregory Vial)

Exemple 48.

Corollaire 49. *Jordan*

Application 50 (H2G2 p.181). *A est nilpotente ssi A est semblable à $2A$*

3.4 Action de O_n et U_n

Théorème 51 (Gou p.260). *Réduction des endomorphismes normaux cas réel et complexe*

Théorème 52 (Gou p.244). *Thm spectral*

Application 53 (Gou p.245). *Racine carrée d'une matrice symétrique/hermitienne positive*

Proposition 54 (Gou p. 257). *Réduction des endomorphismes unitaires dans une b.o.n*

Proposition 55 (Gou p.261). *Réduction des matrices antisymétriques*

4 Action par congruence

Définition 56 (H2G2 p. 250). Action par congruence

Remarque 57 (H2G2 p. 250). *Matrices d'une même forme quadratique dans 2 bases différentes*

Théorème 58 (H2G2 p. 251). *Existence d'une base orthogonale*

Contre-exemple 59 (H2G2 p. 253). *pas unicité de la matrice diagonale*

Théorème 60 (H2G2 p. 254). *Invariants sur \mathbb{C} , \mathbb{R} , \mathbb{F}_q*

Exemple 61.