

# Leçon 156 : Exponentielle de matrices. Applications.

## Développements :

Surjectivité de l'exponentielle dans le cas complexe, Homéomorphisme entre  $H_n$  et  $H_n^{++}$

## Bibliographie :

Szpirglas, Ahmed Lesfari Equations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles, Gourdon Algèbre, H2G2 tome 1 nouvelles histoires, OA

## Plan

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$

## 1 Première approche de l'exponentielle

### 1.1 Définition et premières propriétés

**Définition 1** (Sz p. 349). Exponentielle de matrices par la série convergente

**Proposition 2** (Sz p. 349). *Si  $M$  et  $N$  commutent,  $\exp(M + N) = \exp(M)\exp(N)$*

**Contre-exemple 3.** Cas où ça commute pas

**Corollaire 4** (Sz p. 349).  $\exp(M) \in \text{GL}$

**Proposition 5** (Sz p. 350+H2G2 p. 355 pour compléter). *Tout un tas de relations sur l'exponentielle + le fait que c'est un polynôme.*

**Application 6.** Condition nécessaire pour être une exponentielle de matrices réelle

### 1.2 Calculs d'exponentielles de matrices

**Proposition 7** (Sz p. 350). *Tout un autre tas de relations sur l'exponentielle mais qui vraiment propre au calcul (ex :  $\exp$  d'une matrice diagonale)*

**Exemple 8.** ex de calculs

**Proposition 9** (Gou p. 196+Sz p.350). *Dunford appliqué au calcul de l'exponentielle de matrices*

**Exemple 10** (Gou ex1 p.199).

## 2 Propriétés analytiques/de régularité de l'exponentielle

### 2.1 Différentielle et inversion locale

#### 2.1.1 Différentiabilité

**Proposition 11** (Sz p. 350). *Différentiabilité en 0*

**Proposition 12** (Sz p. 352). *Classe  $C^1$  et différentielle en  $M$*

**Proposition 13** (H2G2 p. 357). *Homéo entre  $S_n$  et  $S_n^{++}$*

**Proposition 14** (H2G2 p. 357). *Homéo entre  $H_n$  et  $H_n^{++}$*

**Application 15** (H2G2 p. 358). Csqcs topologiques de la décomposition polaire

#### 2.1.2 Injectivité ?

**Proposition 16** (Sz p. 354). *Non injectivité*

**Proposition 17** (Sz p. 354). *Difféo local en 0*

**Application 18** (Sz p. 354). Sous groupes arbitrairement petits

#### 2.1.3 Logarithme matriciel : un inverse à droite

**Définition 19** (Sz p. 356). Logarithme matriciel

**Lemme 20** (Sz p. 356). *Dérivée de  $\log(I + tN)$*

**Théorème 21** (Sz p. 356).  $\exp(\log(M)) = M$

**Application 22** (Sz p. 357). Limite d'exponentielles

**Définition 23** (Sz p. 357). Logarithme pour les unipotents

**Proposition 24** (Sz p. 357). *Homéo entre Nilpotent et Unipotent avec inverse ce log*

**Corollaire 25** (0A p.215).  *$A$  diagonalisable ssi  $\exp(A)$  l'est*

## 2.2 Image de l'exponentielle

**Théorème 26** (Sz p. 358). *Surjectivité de l'exponentielle sur  $\mathbb{C}$*

**Application 27** (Sz p. 358).  $\text{GL}_n$  connexe par arcs

**Proposition 28** (Sz p. 359). *Image dans le cas réel*

**Exemple 29.**

**Proposition 30** (Sz p. 365). *Image de  $A_n$  par  $\exp$*

### 3 L'exponentielle de matrices dans la résolution des équations différentielles

#### 3.1 Système à coefficients constants

**Proposition 31** (Sz p. 351). *Dérivée de  $\exp(tA)$*

**Théorème 32** (Les p.75). *Solution générale*

**Exemple 33** (Les p.77).

**Théorème 34** (Sz p.360). *Stabilité du système*

#### 3.2 Système à coefficients non constants

**Définition 35** (Les p.62). *Résolvante*

**Théorème 36** (Les p.64). *Résolvante et solution de l'équation*

**Proposition 37** (Les p. 64). *Equation de Jacobi-Liouville*

**Proposition 38** (Les p.65). *Résolvante quand ça commute*