Leçon 158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Développements :

Homéomorphisme de l'expo, Points extrémaux de la boule unité.

Bibliographie :

Gourdon Alg, FGN Alg 3, H2G2 T1

Plan

E est un K-ev de dimension finie avec $K = R$ ou bien C.

1 Généralités

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 (Gou p.118). Matrices symétriques, antisymétriques, hermitiennes

Exemple 2.

Remarque 3 (Gou p.225). H_n est un R-ev mais pas un C-ev

Proposition 4 (Gou p.224-225). *Dimension*

Proposition 5 (Gou p.224,225). *Somme directe*

Proposition 6 (FGN p.165). *Spectre (attention ne mettre que le sens qui n'utilise pas le thm spectral)*

Définition 7. S_n^+ et S_n^{++} et H_n^+ et H_n^{++}.

Proposition 8 (FGN p.165). *Spectre (attention ne mettre que le sens qui n'utilise pas le thm spectral)*

1.2 Lien avec les endomorphismes, les formes bilinéaires symétriques et les formes hermitiennes

Définition 9 (Gou p.223). Forme bilinéaire symétrique

Définition 10 (Gou p.226). Forme sesquilinéaire hermitienne

Exemple 11.

Définition 12 (Gou p.224). Lien matrice et forme

Proposition 13 (Gou p.224-225). *Matrice sym ssi forme sym //hermit*

Exemple 14. Différentielle seconde

Proposition 15 (Gou p.224). *Changement de base*

Définition 16 (Gou p.225). Forme quadratique +forme polaire

Définition 17 (Gou p.226). Forme hermitienne +forme polaire

Remarque 18 (Gou p.225-226). matrice

Définition 19 (Gou p.239). Adjoint

Proposition 20 (Gou p.239). *Involution*

Définition 21 (Gou p.239). Auto-adjoint

Proposition 22 (Gou p.239). *Matrice de f^*.*

Proposition 23 (Gou p.240). *Ainsi, les matrices des endomorphismes autoadjoints sont exactement les matrices symétriques (resp hermitiennes), et on a un isomorphisme entre ces deux espaces.*

2 Théorie spectrale et réduction

2.1 Théorèmes spectraux

Théorème 24 (Gou p.240). *Thm spectral et matriciellement*

Théorème 25 (Gou p.240). *Thm spectral sur $\mathbb{C}$ et matriciellement*

Corollaire 26 (Gou p.241+demo p.165 FGN). *S_n^+ ssi dans S_n et $Sp \subset R^+$ et pour S_n^{++}.*

Contre-exemple 27 (FGN p.233). Une matrice symétrique complexe n'est pas forcément diagonalisable

Application 28. Homéomorphisme de l'expo

2.2 Classification des formes quadratiques

Théorème 29 (Gou p.241). *Diagonalisation d'une forme quadratique*

Définition 30 (FGN p.212). Equivalence des formes quadratiques/hermitiennes

Définition 31. Rang d'une forme quadratique

Théorème 32 (H2G2 p.299). *Thm d'inertie de Sylvester sur C*

Théorème 33 (H2G2 p.299)**.** *Thm d'inertie de Sylvester sur R +signature*

Proposition 34 (H2G2 p.272)**.** *lien entre signature et signe des valeurs propres*

Exemple 35 (FGn p.217)**.** Un calcul de signature 3

Corollaire 36 (H2G2 p.299)**.** *une matrice symétrique/hermitienne est positive ssi sa forme quadratique réelle/hermitienne associée est de signature (n, 0).*

Exemple 37 (FGN p.216)**.** Un calcul de signature 1

Proposition 38 (FGN p.206)**.** *Caractérisation définie positive par les mineurs*

Contre-exemple 39 (FGN p.115)**.** Faux pour les positives tout court

Corollaire 40 (FGN p.206)**.** S_n^{++} *est un ouvert de* S_n.

2.3 Une conséquence du théorème spectral : pseudo-réduction simultanée

Théorème 41 (Gou p.241 ou FGN p.219)**.** *Pseudo-réduction simultanée et version matricielle*

Contre-exemple 42 (FGN p. 219 -> ex 3.34)**.** En général il n'est pas possible de trouver une base orthogonale simul

Application 43 (FGN p.222)**.** Cnvexité logarithmique et ellispoïde de John-Loewner

3 Décompositions

3.1 Racine carrée

Proposition 44 (FGN p.107+p.173)**.** *Racine carrée d'une matrice symétrique/hermitienne positive*

Exemple 45.

Application 46 (FGN p.108)**.** Si A et B sont sym positives, et si en plus A est def pos, Alors AB est diagonalisable et son spectre est contenu dans R^+

3.2 Décomposition polaire

Théorème 47 (Gou p.246 ou FGN p.128)**.** *Décomposition polaire*

Application 48 (FGN p.130)**.** Points extrémaux de la boule unité

Corollaire 49 (H2G2 p.351)**.** *Norme 2 et rayon spectral*

Corollaire 50 (H2G2 p.351)**.** *Maximalité du groupe orthogonal*

3.3 Décomposition de Choleski

Proposition 51 (FGN p.131)**.** *Choleski*

Application 52 (FGN p.133)**.** Inégalite d'Hadamard pour une matrice symétrique positive

Application 53. problèmes de moindres carrés OU en probabilités construction d'un vecteur gaussien de matrice de covariance donnée à partir d'un vecteur gaussien de matrice de covariance identité