Leçon 204 : Connexité. Exemples et applications.

Développements :

Surjectivité de l'exponentielle, Simplicité de $SO(3)$, Composantes connexes des formes quadratiques réelles

Bibliographie :

Queffelec Topologie (Q), Hauchecorne (H), Gourdon Analyse (G), Tauvel Analyse complexe (T), Rouvière (Rouv)

Notes

Plan librement inspiré de celui présenté par Mégane Bournissou et Jérémy Martin.

Plan

Soit X un espace topologique.

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Définitions de la connexité

Définition 1 (Q p.113)**.** définitions équivalentes de la connexité avec les ouverts, fermés, application continue

Exemple 2. $\varnothing$ et un singleton sont connexes.

Application 3 (Q p.114)**.** exp et racine n-ièmes de l'unité

Définition 4 (Q p.114)**.** partie connexe

Proposition 5 (Q p.114)**.** *Lemme de passage des douanes : toute partie connexe de X qui rencontre l'intérieur et l'extérieur de A, rencontre aussi la frontière.*

Contre-exemple 6 (G p.39)**.** $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe : $\mathbb{Q} \subset (-\infty, a[\cup]a, +\infty),\ a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

1.2 Opérations et stabilité

Proposition 7 (Q p.115)**.** *Stable par union sous certaines conditions*

Contre-exemple 8. Pas vrai en général : deux boules disjointes

Remarque 9 (H p.296). Une intersection de connexes n'est pas connexe en général : cercle et droite tangent en 2 points distincts.

Proposition 10 (Q p.115)**.** *image d'un connexe par une application continue est connexe*

Application 11 (G ex 8 p.47)**.** $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes

Contre-exemple 12 (H p. 296)**.** Pas vrai pour l'image réciproque

Proposition 13 (Q p.115)**.** *Si $A \subset X$ est connexe, et si $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe. En particulier, l'adhérence d'un connexe est connexe*

Proposition 14 (Q p.115)**.** *Un produit d'espaces topogiques est connexe ssi chacun des espaces est connexe*

1.3 Connexité sur la droite réelle

Théorème 15 (Q p.120)**.** *Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles*

Théorème 16 (Q p.120)**.** *TVI*

Application 17 (Q p.120)**.** Thm de Brouwer en dimension 1

1.4 Composantes connexes

Définition 18 (Q p.121)**.** composante connexe

Remarque 19. Les composantes connexes forment une partition de X. X est connexe ssi il n'a qu'une seule composante connexe.

Proposition 20 (Q p.121)**.** *La composante connexe de x est la réunion de tous les connexes contenant x. C'est le plus grand connexe contenant x. Elle est fermée dans X.*

Proposition 21 (Q p.122)**.** *Si on a une décomposition en union disjointe d'ouverts connexes non vides, alors ce sont les composantes connexes.*

Exemple 22. $]-\infty, x] \cup [y, +\infty[\ x < y$

Proposition 23 (Q p.143 nouvelle édition)**.** *Une fonction localement constante est constante sur chaque composante connexe.*

2 Connexité par arcs

2.1 Connexité par arcs

Définition 24 (Q p.117)**.** connexité par arcs

Exemple 25. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont connexes par arcs. Une partie étoilée est connexe par arcs.

Proposition 26 (Q p.117)**.** *connexe par arcs implique connexe. Réciproque vrai si X est un ouvert d'un evn.*

Exemple 27 (Q p.117)**.** L'épigraphe d'une fonction continue réelle est connexe par arcs.

Contre-exemple 28 (H p.300 ou Q ex 1 p. 145)**.** Un connexe qui n'est pas connexe par arcs

Proposition 29. *Simplicité de $SO(3)$*

2.2 Connexité par lignes brisées

Bonus G p.42

3 Application de la connexité

3.1 Connexité dans l'analyse réelle

Théorème 30 (G)**.** *p. 47 ex 9 Darboux*

Proposition 31 (Rouv p. 105)**.** *Différentielle nulle sur un connexe implique cste*

3.2 Connexité dans l'analyse complexe

Théorème 32 (T p. 52)**.** *Principe du prolongement analytique*

Application 33. Prolongement de la fonction Γ d'Euler.

Théorème 34 (T p. 53)**.** *Principe des zéros isolés*

Proposition 35 (T p.61)**.** *Sur un connexe, $f' = 0$ implique f cste*

Théorème 36 (T p.86)**.** *Principe du maximum*

Théorème 37 (T p.71)**.** *Indice cst sur les composantes connexes etc*

+formule de Cauchy mais c'est sur un conVexe..

3.3 Connexité dans les matrices

Proposition 38 (Q p.126)**.** *Composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.*

Proposition 39. *Connexité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$*

Proposition 40. *Composantes connexes des formes quadratiques réelles*

Proposition 41 (Q p.147 ex 10)**.** *projecteurs de rang p dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ connexe*

Théorème 42. *Surjectivité de l'exponentielle matricielle complexe*

Proposition 43. *Image de exp matricielle réelle*

Contre-exemple 44. matrice réelle qui n'a pas d'antécédant par exp.