Leçon 218 : Applications des formules de Taylor

Développements :

TCL (Zuily Queffelec), Méthode de Newton (Rouvière)

Bibliographie :

Gourdon Analyse, Rouvière, Demailly, Ouvrard 2 (1 prop), RDO3

Soient E, F des evn réels de dimension finie. Soit U un ouvert de E

1 Formules de Taylor

1.1 Dans $\mathbb{R}$ [G]

Proposition 1 (Formule de Taylor Lagrange). *[G p. 73 ou 308 ou RDO3 p.125] (attention à valeurs dans $\mathbb{R}$)*

Application 2 (Inégalités entre fonctions). [G p.76 ex 1]

1.2 Dans un evn de dimension finie [G et OA ou RDO3 p.334-335]

Proposition 3 (Formule de Taylor Young). *[OA p. 24] (vrai dans evn dim quelconque)*

Remarque 4. Propriété locale

Proposition 5 (Formule de Taylor avec reste intégral). *[OA p. 25] (vrai pour E qlq, F Banach)*

Remarque 6. Propriété globale, information sur le terme de reste

Proposition 7 (Inégalité de Taylor-Lagrange). *[G p. 75 à adapter] (vrai pour E qlq, F Banach)*

2 Application en analyse

2.1 Développements limités [G]

Ici $f : I \subseteq \mathbb{R} \to F$.

Définition 8 (DL d'ordre n). [G p. 87]

Proposition 9 (Unicité du DL). *[G p. 87]*

Proposition 10 (OA p. 25 ou G p. 88). *La formule de Taylor Young donne l'existence des DL d'une fonction en un point a, ainsi que l'expression des coeffs*

Exemple 11 (G p. 89). Quelques DL usuels

Application 12 (Levée de forme indéterminée). [G p. 90 ou ex 3 p. 92]

Proposition 13 (G p. 87). *Si f admet un $DL(0,n)$ alors $f(0) = a_0$, f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$.*

Contre-exemple 14 (G p. 88). pas vrai pour la dérivée seconde

2.2 Développement en série entière [G]

Proposition 15 (G p. 240). *CNS de DSE*

Remarque 16. En pratique, pour montrer que R_n tend vers 0, on utilise Taylor Lagrange ou Taylor reste intégral.

Exemple 17 (G p. 241).

Contre-exemple 18 (G p. 241). fonction C^∞ qui ne coïncide pas avec sa série de Taylor dc pas DSE.

Proposition 19 (Théorème de Bernstein). *[G p. 250 ex 8] dérivées paires positives implique DSE. +ex*

2.3 Autres conséquences [G]

Théorème 20 (Darboux). *[G p. 78 ex 4 (2nde méthode)] Si f est dérivable alors f'(intervalle)= intervalle*

Proposition 21 (Lemme d'Hadamard). *[G p. 311 ex 4]*

Proposition 22 (Inégalité de Kolmogorov). *[G p. 83 Indication] $M_1 \leq \sqrt{M_0 M_2}$.*

Proposition 23 (Formule de Taylor pour la fonction caractéristique). *[Ouv2 p. 313 lem 14.21]*

Théorème 24 (TCL). *[ZQ p. 540+555+563]*

3 Application à l'étude d'extrema [R]

Théorème 25 (R ex 108). *f convexe ssi $d^2 f$ forme quadratique positive.*

Théorème 26 (lien entre extrema et différentielles premières et seconde). *[R thm 7.1 p.360]*

Contre-exemple 27 (R thm 7.1 p.360).

4 Application en analyse numérique

4.1 Suites récurrentes [R]

Proposition 28 (Points fixes attractifs). *[R ex 48]*

Exemple 29 (R). Nombre d'or

Proposition 30 (Méthode de Newton). *[R ex 49]*

Exemple 31 (R). Nombre d'or

4.2 Intégration numérique [Dem]

Chap 3 p. 59
Introduction

Définition 32 (Méthode d'ordre n). [Dem p. 60]

Théorème 33 (Noyau de Peano). *[Dem p. 67]*

Théorème 34 (Tableau comparatif). *[Dem p. 60 à 63 et 68] méthode (rectangle à gauche, point milieu, trapèze, simpson) conditions sur f,formule, ordre, majoration erreur*