

Leçon 261 : Fonction caractéristique d'une v.a. . Exemples et applications.

Développements :

TCL (ZQ), Calcul de quelques fonctions caractéristiques(Garet)

Bibliographie :

Garet de l'intégration au probabilités, Barbe Ledoux

Plan

1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 (G p.213). Fonction caractéristique

Remarque 2. C'est la transformée de Fourier de la loi \mathbb{P}_X .

Exemple 3 (G p. 219 et 210). Quelques fonctions caractéristiques lois à densité et lois discrètes

Proposition 4 (G p. 216). *fonction caractéristique de $AX + b$*

Théorème 5 (BL p. 63). *Formule d'inversion de Fourier*

Théorème 6 (G p.213). *Caractérise la loi*

Proposition 7 (G p.215). *Prop des fonctions caractéristiques*

Théorème 8 (G p. 216). *(Bonus) Bochner*

2 Indépendance

Théorème 9 (G p.217). *Cas de la somme*

Contre-exemple 10 (G p.235). La réciproque est fautive :Loi de Cauchy

Exemple 11. Somme de lois normales indépendantes

Théorème 12 (G p. 217). *Cas du couple*

Théorème 13 (G p.217). *Une CS pour indépendance dans le cas du couple*

3 Moments

Théorème 14 (G p. 218 +BL p.64 OUV2 p.204 pr le vrai thm). *Lien ordre des moments et régularité de la fonction caractéristique*

Remarque 15 (BL p. 65). Les moments ne caractérisent pas la loi

Théorème 16 (BL p. 66). *Thm des moments*

4 Convergence en loi

Définition 17 (G p. 265). cv en loi

Proposition 18 (G p. 276). *Thm de Lévy*

Exemple 19 (G p. 283 ex 90). étude d'une cv

Exemple 20 (Nourdin). cv en loi de $N(m_n, \sigma_n^2)$.

Application 21 (G p. 277). TCL

Application 22. Intervalle de confiance

5 Liens avec d'autres fonctions caractérisantes

5.1 Cas des v.a. discrètes : fonction génératrice

Définition 23 (G p. 209). Fonction génératrice

Remarque 24 (G p. 219). Lien $\varphi_X(t) = G_X(e^{it})$.

Exemple 25 (G p. 210). Quelques fonctions génératrices

Proposition 26 (G p. 210). *fonction génératrice d'une somme de v.a. indépendantes*

Application 27 (G p. 211). Somme de poisson indépendantes suit une loi de Poisson

Application 28 (G p. 233 ex 2). fonction génératrice d'une somme indéxée par une v.a.

Proposition 29 (G p. 211+212). *Liens fonction génératrice et moments*

5.2 Extension aux valeurs complexes : transformée de Laplace

Définition 30 (G p. 224 ou BL p. 66). Transformée de Laplace

Proposition 31 (BL p.66). *Lieu de définition et analyticité*

Remarque 32. Toujours définie en 0. Peut n'être définie qu'en 0 : loi de Cauchy

Exemple 33 (G p. 233 ex 1). Pour la loi Gamma, pour des lois usuelles,

Théorème 34. *Caractérise la loi*

Proposition 35 (G p. 224). *transformée de Laplace d'une somme de v.a. indépendantes*

Contre-exemple 36 (FF p.161). Réciproque fausse

Application 37 (G p. 233 ex 1). somme de Gamma indépendantes est une Gamma. Somme d'exponentielle

Proposition 38 (FF p.160). *transformée de Laplace du couple de v.a. indépendantes*

Théorème 39. *Lien cv de transformée de Laplace et cv en loi*