Leçon 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Développements :

Weierstrass et Galton Watson

Bibliographie :

Garet de l'intégration aux probabilités (G), Cottrell(C), Barbe Ledoux(BL)

Plan

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire.

Définition 1 (G p.103)**.** Loi $\mathbb{P}_X$

1 Définitions, moments et lois usuelles

1.1 Loi de v.a. discrètes

Définition 2 (G p.117)**.** v.a. discrète (v.a.d)

Théorème 3 (G p.117)**.** *La connaissance de D et des p_i permet de reconstituer la loi de X +densité*

Exemple 4. Bernoulli

Proposition 5 (G p.119)**.** *L'image d'une v.a.d est une v.a.d*

Exemple 6 (G p.119)**.**

1.2 Lois usuelles

1.2.1 Loi de Bernoulli

Définition 7 (G p.123)**.** v.a. de Bernoulli

Interprétation : tirage à pile ou face

1.2.2 Loi uniforme

[G p.123]

Définition 8. uniforme

Interprétation : résultat d'un lancer de dé

1.2.3 Loi binomiale

Définition 9 (G p.124)**.** binomiale

Interprétation : répétitions

1.2.4 Loi géométrique

Définition 10 (G p.125)**.** Géométrique

Interprétation : nb d'essais avant réussite

1.2.5 Loi de Poisson

Définition 11 (G p.126)**.** Poisson

Interprétation : phénomènes de comptage : arrivée à un guichet etc

1.3 Espérance et variance

Définition 12 (G p.149)**.** espérance d'une v.a.d

Exemple 13. Bernoulli

Théorème 14 (G p.148)**.** *Thm de transfert cas discret*

Proposition 15 (G p.144)**.** *Markov*

Définition 16 (G p.155)**.** Variance

Proposition 17 (G p.155)**.** $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

Définition 18. moments d'ordre n

Tableau récapitulant $X(\Omega)$, les proba, espérance et variance pour chaque loi vue. [G p.168]

2 V.a. discrètes indépendantes

2.1 Indépendance

Proposition 19 (BL p.76)**.** *Caractérisation de l'indépendance pour des v.a. discrètes.*

Exemple 20 (BL p.76)**.**

Proposition 21 (BL p.80)**.** *Indépendance et espérance*

2.2 Somme de variables aléatoires discrètes indépendantes

Proposition 22 (G p.116 ou BL p.85). *Loi de la somme de v.a. indépendante*

Proposition 23 (G p.159 ou BL p.81). *Variance de la somme de v.a. indépendante*

Application 24. Thm de Weierstrass

3 Fonction génératrice (pour les variables à valeurs dans $\mathbb{N}$)

Définition 25 (G p.209). fonction génératrice

Remarque 26 (G p.209). Si la loi est à support fini, c'est un polynôme

Exemple 27. Bernoulli, géométrique, Poisson

Proposition 28 (G p.210). *fonction génératrice de somme de v.a. indépendantes*

Exemple 29 (G p.210). Somme de lois de Poisson, lien binomiale Bernoulli

Exemple 30 (C dés truqués p.67).

Théorème 31 (G p.211). *$\mathcal{C}^\infty$, caractérise la loi +lien avec les moments*

Théorème 32. *Galton watson*

4 Théorèmes limite

4.1 Approximation de loi de Poisson

Proposition 33 (G p.267+269). *Caractérisation cv en loi pour v.a.d (CNS)*

Théorème 34 (G p.267). *Thm de Poisson*

4.2 LGN et TCL

Théorème 35 (BL p.132). *LGN faible*

Théorème 36 (BL p.132). *LGN forte*

Exemple 37 (BL p.136).

Théorème 38 (BL p.136). *TCL*

Application 39 (BL p.138). Cas binomial (Moivre Laplace)+intervalle de confiance

5 Chaines de Markov

Si encore de la place..