Deuxième partie

Développements

4 Formule des Compléments

La formule des compléments est une équation fonctionnelle qui permet de faire le lien entre la fonction Γ et le sinus complexe. On montre l'égalité sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et l'on peut ensuite prolonger le résultat à la bande ouverte de $\mathbb{C}$ correspondante en utilisant l'holomorphie des fonctions en jeu sur cet ensemble et leur égalité sur un domaine contenant un point d'accumulation.

Théorème 1
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) \in]0;1[$,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Étape 1
La première étape consiste à calculer, pour $x \in]0,1[$, $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ sous forme d'intégrale.

Soit donc $x \in]0;1[$. On a :

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \int_0^\infty s^{-x}\,\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s$$

Les intégrandes étant toutes positives, on applique Fubini-Tonelli pour poursuivre le calcul en interversant les intégrales.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{t}{s}\right)^x \frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{-(t+s)}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

On réalise maintenant le changement de variable suivant :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 & \leftarrow & \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \\ & & (s,t) & \mapsto & \left(s+t, \frac{t}{s}\right) \end{array}$$

φ est bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. On calcule le Jacobien de son inverse, en notant $u = s+t$ et $v = \frac{t}{s}$:

$$|J_\varphi| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{t}{s^2} & \frac{1}{s} \end{vmatrix} = \frac{s+t}{s^2}$$

D'où

$$|J_{\varphi^{-1}}| = \frac{s^2}{s+t} = \frac{u}{(1+v)^2}$$

.

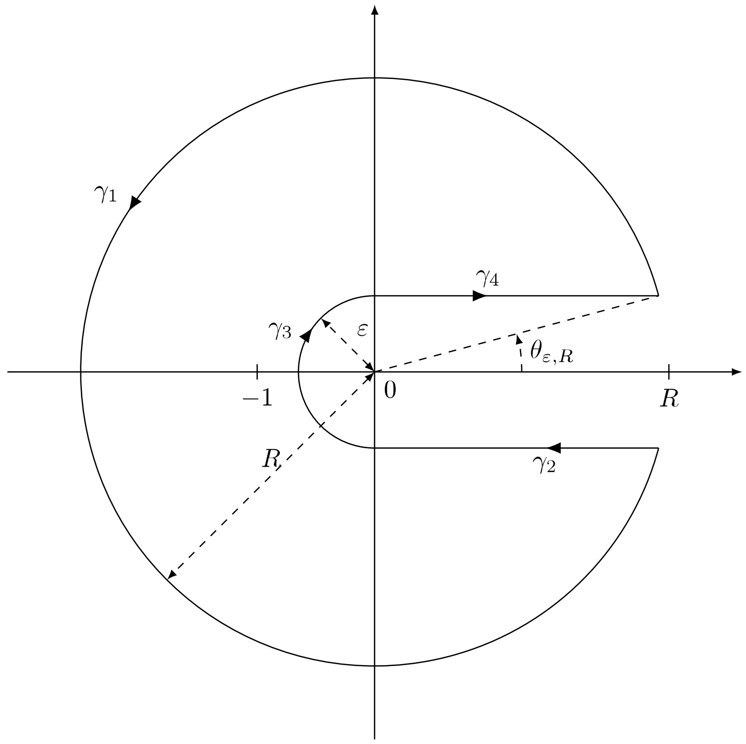

FIGURE 1 – Contour d'intégration pour le théorème des Résidus

D'autre part, on a $\frac{1}{t} = \frac{1+v}{uv}$. Revenons maintenant au calcul, où on effectue le changement de variable, puis on utilise encore Fubini-Tonelli plusieurs fois :

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \int_0^\infty \int_0^\infty v^x \,\mathrm{e}^{-u}\, \frac{1+v}{uv} \frac{u}{(1+v)^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &\overset{F.T}{=} \int_0^\infty \frac{v^{x-1}}{1+v} \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} \,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}v \\ &= \int_0^\infty \frac{v^{x-1}}{1+v} \mathrm{d}v \\ &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}v}{v^{1-x}(1+v)}\end{aligned}$$

On utilise l'invariance de $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ par changement de variable $x \mapsto 1-x$, pour finalement obtenir

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}v}{v^x(1+v)}$$

On a donc obtenu une expression de $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ sous forme intégrale. L'étape suivante consistera à calculer cette intégrale à l'aide du théorème des résidus.

Étape 2

On va donc calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}v}{v^x(1+v)}$$

On va utiliser pour cela le Théorème des Résidus, appliqué à la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & z & \longmapsto & \frac{1}{z^x(1+z)} \end{array}$$

f est méromorphe sur $\mathbb{C}$, et possède deux pôles simples, 0 et 1. On intègre f sur le contour $\mathcal{C}$ présenté sur la figure 1. On décompose ce contour en quatre parties, les deux segments et les deux arcs de cercle, que l'on paramètrera séparément. On fait ensuite tendre ε vers 0 et R vers $+\infty$.
Munis de ce contour, on peut maintenant choisir une détermination du logarithme complexe qui nous permet de bien définir le z^x dans l'expression de f. On choisit la détermination de droite $\mathbb{R}^+$, i.e. pour $z \in \mathbb{C}, \quad z^x = \mathrm{e}^{x(\ln(|z|)+\theta)}$, avec $\theta \in]0;2\pi[$. Il faudra dans la suite du calcul faire attention à l'argument des complexes lorsque ε tend vers 0 : sur le segment γ_2, l'argument de $z^x = \mathrm{e}^{x\log(z)}$ tend vers 2π, alors qu'il tend vers 0 sur le segment γ_4.

Théorème des Résidus
Le théorème des Résidus appliqué à f donne

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\mathrm{d}z = 2i\pi\mathrm{Res}_{-1}(f) = 2i\pi(-1)^{-x} = 2i\pi\,\mathrm{e}^{-i\pi x}$$

Il est important de remarquer que le fait que $(-1)^{-x} = \mathrm{e}^{-i\pi x}$ provient de la détermination du logarithme choisie.

Intégrale sur γ_1
On utilise la paramétrisation suivante :

$$\begin{array}{rccc} \gamma_1 & : & [\theta_{\varepsilon,R}; 2\pi-\theta_{\varepsilon,R}] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & t & \longmapsto & R\,\mathrm{e}^{it} \end{array}$$

L'intégrale de f sur cet arc de cercle devient alors :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z &= \int_{\theta_{\varepsilon,R}}^{2\pi-\theta_{\varepsilon,R}} \frac{iR\,\mathrm{e}^{it}}{(R\,\mathrm{e}^{it})^x(1+R\,\mathrm{e}^{it})}\mathrm{d}t \\ &\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_0^{2\pi} \frac{iR\,\mathrm{e}^{it}}{(R\,\mathrm{e}^{it})^x(1+R\,\mathrm{e}^{it})}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

où la limite en $\varepsilon \to 0$ est justifiée par l'intégrabilité sur le segment $[0;2\pi]$ de l'intégrande.
On cherche maintenant à passer à la limite en $R \to +\infty$. On remarque que pour $t \in [0;2\pi]$, on a :

$$\left|\frac{iR\,\mathrm{e}^{it}}{(R\,\mathrm{e}^{it})^x(1+R\,\mathrm{e}^{it})}\right| \leq \frac{R}{R^x(R-1)} \underset{R\infty}{\sim} R^{-x} \underset{R\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{car } x>0$$

Une majoration par inégalité triangulaire donne alors :

$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z \underset{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}}{\longrightarrow} 0$$

Intégrale sur γ_3 On utilise le même genre de paramétrisation :

$$\begin{array}{rcrcl}\gamma_3 & : & [\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ & & t & \longmapsto & \varepsilon\,\mathrm{e}^{i(2\pi-t)}\end{array}$$

L'intégrale de f sur cet arc de cercle devient alors :

$$\int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{-i\varepsilon\,\mathrm{e}^{-it}}{(\varepsilon\,\mathrm{e}^{-it})^x(1+\varepsilon\,\mathrm{e}^{-it})}\mathrm{d}t$$

Ici encore une majoration par inégalité triangulaire suffit à conclure sur la limite de cette intégrale quand $\varepsilon\to 0$. En effet,

$$\left|\frac{-i\varepsilon\,\mathrm{e}^{-it}}{(\varepsilon\,\mathrm{e}^{-it})^x(1+\varepsilon\,\mathrm{e}^{-it})}\right| \leq \frac{\varepsilon}{\varepsilon^x(1-\varepsilon)} \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \varepsilon^{1-x} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{car } 1-x>0$$

Intégrale sur γ_2 **:**

On paramétrise le segment comme suit :

$$\begin{array}{rcrcl}\gamma_2 & : & [-\sqrt{R^2-\varepsilon^2};0] & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ & & t & \longmapsto & -i\varepsilon-t\end{array}$$

L'intégrale de f sur ce segment devient alors :

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z &= \int_{-\sqrt{R^2-\varepsilon^2}}^{0} \frac{-\mathrm{d}t}{(-i\varepsilon-t)^x(1-t-i\varepsilon)}\\ &= -\int_0^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} \frac{\mathrm{d}t}{(-i\varepsilon+t)^x(1+t-i\varepsilon)}\\ &= -\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[0;\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]}(t)\frac{\mathrm{d}t}{(-i\varepsilon+t)^x(1+t-i\varepsilon)}\end{aligned}$$

Où la dernière égalité est obtenue en effectuant le changement de variable $t\mapsto -t$.

On applique le Théorème de Convergence Dominée pour calculer la limite en $\varepsilon\to 0$.

- Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $\mathbb{1}_{[0;\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]}(t)\frac{-1}{(-i\varepsilon+t)^x(1+t-i\varepsilon)} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \mathbb{1}_{[0;R]}\frac{-1}{(t\,\mathrm{e}^{2i\pi})^x(1+t)}$ en tenant compte de la détermination du logarithme choisie, l'argument de $-i\varepsilon+t$ tend vers 2π.
- Pour $t\in\mathbb{R}_+$, $\left|\mathbb{1}_{[0;\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]}(t)\frac{1}{(-i\varepsilon+t)^x(1+t-i\varepsilon)}\right| \leq \frac{1}{t^x(1+t)}$. En effet, pour $t\in\mathbb{R}_+$,

$$|t-i\varepsilon| = \sqrt{t^2+\varepsilon^2} \geq \sqrt{t^2} = t$$

  et de même, $|1+t-i\varepsilon| = \sqrt{(1+t)^2+\varepsilon^2} \geq 1+t$.

  De plus, $\frac{1}{t^x(1+t)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^x}$ qui est intégrable au voisinage de 0 puisque $x<1$. De même, au voisinage de $+\infty$, $\frac{1}{t^x(1+t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$ qui est intégrable puisque $x+1>1$. On a donc dominé l'intégrande par une fonction intégrable sur $[0;+\infty]$.

Le Théorème de Convergence Dominée donne alors

$$\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[0;R]}(t)\frac{\mathrm{d}t}{t^x\,\mathrm{e}^{2i\pi x}(1+t)}$$

Un deuxième TCD, avec la même domination donne également, pour la limite en $R\to+\infty$

$$\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z \underset{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}}{\longrightarrow} -\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x\,\mathrm{e}^{2i\pi x}(1+t)}$$

Intégrale sur γ_4 :

On paramétrise le segment de manière similaire à γ_2 :

$$\begin{array}{rcrcl}\gamma_4 & : & [0;\sqrt{R^2-\varepsilon^2}] & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ & & t & \longmapsto & i\varepsilon+t\end{array}$$

L'intégrale de f sur ce segment devient alors :

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_4} f(z)\mathrm{d}z &= \int_0^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} \frac{\mathrm{d}t}{(i\varepsilon+t)^x(1+t+i\varepsilon)}\\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[0;\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]}(t)\frac{\mathrm{d}t}{(i\varepsilon+t)^x(1+t+i\varepsilon)}\end{aligned}$$

On applique encore le Théorème de Convergence Dominée pour passer à la limite en $\varepsilon\to 0$:

— Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $\mathbb{1}_{[0;\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]}(t)\frac{1}{(i\varepsilon+t)^x(1+t+i\varepsilon)} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \mathbb{1}_{[0;R]}\frac{1}{t^x(1+t)}$ en tenant compte de la détermination du logarithme choisie, l'argument de $i\varepsilon+t$ tend vers 0.

— On domine de la même façon que précédemment : pour $t\in\mathbb{R}_+$, $\left|\mathbb{1}_{[0;\sqrt{R^2-\varepsilon^2}]}(t)\frac{1}{(i\varepsilon+t)^x(1+t+i\varepsilon)}\right| \leq \frac{1}{t^x(1+t)}$, intégrable sur $[0;+\infty]$.

On obtient donc, après avoir appliqué une nouvelle fois le TCD pour passer à la limite en $R\to+\infty$,

$$\int_{\gamma_4} f(z)\mathrm{d}z \underset{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$$

Retour au Théorème des Résidus

En passant à la limite en $\varepsilon\to 0$, puis en $R\to+\infty$ dans l'égalité donnée par le Théorème des Résidus, on obtient :

$$\begin{aligned}2i\pi\,\mathrm{e}^{-i\pi x} &= \underset{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}}{lim}\left(\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_4} f(z)\mathrm{d}z\right)\\ &= 0 - \mathrm{e}^{-2i\pi x}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)} + 0 + \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}\\ &= (1-\mathrm{e}^{-2i\pi x})\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^x(1+t)}\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in]0,1[$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)} = 2i\pi \frac{\mathrm{e}^{-i\pi x}}{1-\mathrm{e}^{-2i\pi x}} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

On a donc finalement bien montré que pour tout $x \in]0;1[$,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

On étend la validité de cette formule à tout $z \in \Re \in]0;1[$ par prolongement analytique des fonctions holomorphes $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ et $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ sur cette bande.