Marche aléatoire

Garet - Kurtzmann

<u>Def</u> : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. iid à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$

on pose $S_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est une <u>marche aléatoire</u> sur $\mathbb{Z}^d$ issue de 0.

<u>Def</u> : On considère ici une marche aléatoire dite simple "isotrope"

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in [\![1,d]\!]$, $\mathbb{P}(X_n = e_i) = \mathbb{P}(X_n = -e_i) = \frac{1}{2d}$

(chaque direction est équiprobable). (les $(e_i)_{1\leq i\leq d}$ forment la base canonique de $\mathbb{R}^d$)

<u>But</u> : Savoir si la marche repasse souvent en 0 ou non.

<u>Parenthèse sur les chaînes de Markov</u>

- état <u>récurrent</u> / <u>transient</u> : $x \in E$ est récurrent si $\mathbb{P}_x(\tau_x < \infty) = 1$ où $\tau_x = \inf\{n \geq 1 ; X_n = x\}$

  $\mathbb{P}_x$: proba partant de x

  transient si $\mathbb{P}_x(\tau_x < \infty) < 1$

- en terme de nombre de passage en x : récurrent ssi $\mathbb{P}_x(N_x = \infty) = 1$

  transient ssi $\mathbb{P}_x(N_x < \infty) = 1$

- en terme de série : récurrent ssi $\mathbb{E}_x[N_x] = +\infty$ avec $\mathbb{E}_x[N_x] = \mathbb{E}_x\left[\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{X_k = x}\right]$

  $= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_k = x)$

- lorsque la chaîne est irréductible (ie tous les états communiquent), tous les états ont même nature (récurrents ou transients)

- Dans le cas de marche aléatoire, $(S_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov ($S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$) irréductible.

  Donc 0 est récurrent ssi $\mathbb{E}_0[N_0] = +\infty$ ssi $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_0(S_n = 0) = +\infty$.

  $\Rightarrow$ Donc on va étudier la convergence de la série $\sum \mathbb{P}(S_n = 0)$. (cf Lemme)

<u>Lemme</u>

$$\mathbb{P}(N_0 = +\infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = 0) < \infty \\ 1 & \text{si } \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = 0) = +\infty \end{cases}$$

preuve du lemme :

- Cas 1 : $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_k=0) < +\infty$.

D'après Borel-Cantelli 1, $\mathbb{P}(\limsup_k (S_k=0)) = 0$

ie $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{k\geq n} (S_k=0)\right) = 0$

ie $\mathbb{P}\left(\forall n\geq 0, \exists k\geq n \text{ tq } S_k=0\right) = 0$

ie $\mathbb{P}(\exists n\geq 0 \text{ tq } \forall k\geq n, S_k\neq 0) = 1$

ie $\mathbb{P}(S_k=0 \text{ infiniment souvent}) = 0$

(Parenthèse) Borel-Cantelli

1. Si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge Alors $\mathbb{P}(\cap\cup A_k) = 0$.
2. Si $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge et $(A_n)_n \perp\!\!\!\perp$, Alors $\mathbb{P}(\cap\cup A_k) = 1$.

preuve

1. on pose $B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k$. Suite décroissante d'événements.

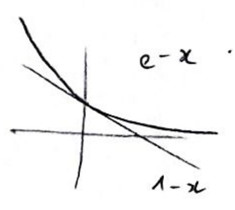
Donc $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1} B_n\right) = \lim_{n\infty} \mathbb{P}(B_n)$

$\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \sum_{k\geq n} \mathbb{P}(A_k) \xrightarrow[n\infty]{} 0$ car reste d'une série convergente.

Donc $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1} B_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k\right) = 0$

2. $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$

Soit $n, m \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\right) \\ &\downarrow \perp\!\!\!\perp \\ &= 1 - \prod_{k=n}^{m} \mathbb{P}(\overline{A_k}) \\ &= 1 - \prod_{k=n}^{m} [1-\mathbb{P}(A_k)] \\ &\geq 1 - \prod_{k=n}^{m} e^{-\mathbb{P}(A_k)} \\ &= 1 - e^{-\sum_{k=n}^{m}\mathbb{P}(A_k)} \xrightarrow[m\infty]{} 1\end{aligned}$$



Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) = 1$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} \overline{A_k}\right) \\ &\geq 1 - \sum_{n\geq 1} \underbrace{\mathbb{P}(\cap \overline{A_k})}_{=0}\end{aligned}$$

ou intersection d'évènements presque sûrs est encore presque sûre.

$\square$

Fin de la parenthèse

. Cas 2 : On pose $B = \{N_0 < +\infty\}$.

Alors $B = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \{T = n\} = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \{S_n = 0\} \cap \{\forall k > n,\ S_k \neq 0\}$

T est l'instant de dernier retour en 0.

$$B = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \underbrace{\{S_n = 0\}}_{\in \sigma(X_1, \dots, X_n)} \cap \underbrace{\{\forall k > n,\ S_k - S_n \neq 0\}}_{\in \sigma(X_{n+1}, \dots, X_k)}$$

$\sigma(X_1, \dots, X_n) \perp\!\!\!\perp \sigma(X_{n+1}, \dots, X_k)$

De plus, l'union est disjointe.

Alors $\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)\, \mathbb{P}(\forall k > n,\ S_k - S_n \neq 0)$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)\, \mathbb{P}(\forall k > 0,\ S_k - S_0 \neq 0)$ car chaîne homogène

$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)\right) . \mathbb{P}(T = 0)$

≤ 1

Donc $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = +\infty \implies \mathbb{P}(T = 0) = 0$.

Mais alors $\mathbb{P}(B) = 0$ également.

Donc $\mathbb{P}(N_0 = +\infty) = 1$.

Faire plutôt $B_N = \bigsqcup_{n=0}^{N} \{T = n\}$ puis $\mathbb{P}(B_N) = \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(S_n = 0) \times \mathbb{P}(T = 0)$

D'où $\mathbb{P}(T = 0) = 0$.

$\rightarrow$ On cherche donc à étudier la série de terme général $\mathbb{P}(S_n = 0)$

Théorème

$\sum \mathbb{P}(S_n = 0)$ diverge ssi $d \leq 2$.

Autrement dit, la chaîne est récurrente ssi $d \leq 2$.

Donc 0 est transient ssi $d \geq 3$.

Preuve Soit d quelconque.

Etape 1 : Calcul de $\mathbb{P}(S_n = 0)$:

. Pour $t =: (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$, $\varphi(t) := \varphi_{X_1}(t) = \mathbb{E}\left[e^{i\langle X_1, t\rangle}\right] = \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{2d}\left(e^{i\langle t, e_j\rangle} + e^{-i\langle t, e_j\rangle}\right)$

$= \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} \cos(t_j)$

. Par indépendance des $(X_i)_i$, on a $\varphi_{S_n}(t) = (\varphi(t))^n$

. Par ailleurs, on sait que $\varphi_{S_n}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(S_n=k)e^{ikt}$ (Théorème de transfert)

On a alors $\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi;\pi]^d} \varphi_{S_n}(t)\,dt \overset{(F)}{=} \frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} \mathbb{P}(S_n=k)e^{i\langle k,t\rangle}\,dt$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(S_n=k)\,\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi;\pi]^d} e^{i\langle k,t\rangle}\,dt}_{=\begin{cases}0 & \text{si } k\neq(0,\dots,0)\\ 1 & \text{si } k=(0,\dots,0)\end{cases}}$$

$$= \mathbb{P}(S_n=0)$$

Justification de Fubini :

$|\mathbb{P}(S_n=k)e^{i\langle k,t\rangle}| = \underbrace{\mathbb{P}(S_n=k)}$ $\quad\forall k\in\mathbb{Z}^d$ et $t\in[\pi;\pi]^d$

intégrable sur $\mathbb{Z}^d$ p/r mesure de comptage $(\sum = 1)$

$[-\pi;\pi]^d$ car constante sur intervalle borné.

Finalement, $\boxed{\mathbb{P}(S_n=0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi;\pi]^d} \underbrace{\left(\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\cos(t_j)\right)^n}_{\varphi(t)^n} dt_1\dots dt_d}$

Etape 2 : On somme. $\mathbb{P}(S_n=0)=0$ si n impair. Donc

$$\sum_{n\geq0}\mathbb{P}(S_n=0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{n\geq0}\int_{[-\pi;\pi]^d}(\varphi(t))^{2n}\,dt$$

$$\overset{(FT)}{=} \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[\pm\pi]^d}\sum_{n\geq0}(\varphi(t))^{2n}\,dt$$ Fubini-Tonelli car positif.

$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[\pm\pi]^d}\frac{dt}{1-\varphi(t)^2}$$

~~Justification de Fubini~~

~~$|\varphi(t)^n| = \left|\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\cos(t_j)\right|^n < 1$ si $t\neq(0,\dots,0), \pm(\pi,\dots,\pi)$.~~

~~Donc intégrable (presque partout) sur $[-\pi;\pi]^d\times\mathbb{N}$.~~

~~et $\varphi(t)\in\mathbb{R}$.~~

~~On peut donc bien appliquer Fubini.~~

Etape 3 Intégrabilité ?

- Il s'agit de la justifier pour $t \longmapsto \frac{1}{1-\varphi(t)^2}$ en $(0, \dots, 0)$ et $\pm(\pi, \dots, \pi)$
- On peut se limiter au point $(0, \dots, 0)$ puisque $\varphi(t \pm \pi) = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} \cos(t_j \pm \pi)$

$$= -\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} \cos(t_j)$$
$$= -\varphi(t)$$

- On peut développer cos au voisinage de 0 : $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

D'où $\varphi(t) = \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d}\left(1 - \frac{t_j^2}{2} + o(t_j^2)\right) = 1 - \frac{1}{2d}\sum_{j=1}^{d} t_j^2 + o\left(\sum_{j=1}^{d} t_j^2\right)$

$$= 1 - \frac{1}{2d}\|t\|^2 + o(\|t\|^2)$$

D'où $1-\varphi(t)^2 = 1 - \left(1 - \frac{1}{2d}\|t\|^2 + o(\|t\|^2)\right)^2$ ↓ dl de $(1-x)^\alpha$ à l'ordre 1

$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{d}\|t\|^2 + o(\|t\|^2)\right)$$
$$= \frac{\|t\|^2}{d} + o(\|t\|^2)$$

et encore $\frac{1}{1-\varphi(t)^2} = \frac{1}{\frac{\|t\|^2}{d} + o(\|t\|^2)} = \frac{d}{\|t\|^2} \cdot \frac{1}{1+(o(1))} \sim \frac{d}{\|t\|^2}$

D'où $\boxed{\frac{1}{1-\varphi(t)^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{d}{\|t\|^2}}$

Lemme

$$\begin{aligned} B(0,1) \subset \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{1}{\|t\|^2} \end{aligned}$$ est intégrable ssi $d \geq 3$.

preuve

$d = 1$: $\frac{1}{t^2}$ non intégrable au voisinage de 0. (primitive $\frac{1}{t}$)

$d = 2$: $\frac{1}{\|t\|^2} = \frac{1}{t_1^2+t_2^2}$. On regarde $\int_{B_2(0,1)} \frac{dt_1 dt_2}{t_1^2+t_2^2}$

chgt var : $\varphi : [0,1] \times [0, 2\pi[\longrightarrow B_2(0,1)$
$(r, \theta) \longmapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$

$dt_1 dt_2 = r\,dr\,d\theta$

D'où $\int_{B_2(0,1)} \frac{dt_1 dt_2}{t_1^2+t_2^2} = \int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{r\,dr\,d\theta}{r^2} = 2\pi\int_0^1 \frac{dr}{r} = +\infty.$

$\underline{d \geq 3}$

$$\int_{B_d(0,1)} \frac{dx_1 \cdots dx_d}{x_1^2 + \cdots + x_d^2} \leq \int_{B_d(0,1)} \frac{dx_1 \cdots dx_d}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$

$$\leq \int_{-1}^{1} dx_4 \cdots \int_{-1}^{1} dx_d \int_{B_3(0,1)} \frac{dx_1\, dx_2\, dx_3}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$

car $\{x_1^2 + \cdots + x_d^2 \leq 1\} \subset \{x_1^2+x_2^2+x_3^2 \leq 1 \text{ et } |x_i| \leq 1 \ \forall i\}$

$$= 2^{d-3} \int_{B_3(0,1)} \frac{dx_1\, dx_2\, dx_3}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$

chgt variable sphérique : $dx_1\, dx_2\, dx_3 = r^2 dr\, d\theta \sin\theta\, d\varphi$

$$= 2^{d-3} \int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi}{r^2}$$

$$= 2^{d-3} \times 1 \times 2\pi \times \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta}_{[-\cos\theta]_0^{\pi} = 1+1=2.}$$

$< \infty.$

$\boxtimes$

$\Rightarrow$ Finalement, $\sum P(S_n = 0)$ diverge ssi $d \leq 2$

ie $\boxed{\text{récurrence} \iff d \leq 2.}$

<u>Autre preuve de la récurrence de tous les états :</u>

Il s'agit de montrer que $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S_n = k)$ converge.

Soit k fixé $\in \mathbb{Z}^d$. On pose $\ell = |k|$

Alors pour $n \geq \ell + 1$, $\mathbb{P}(S_n = 0) \geq \mathbb{P}(\{S_n = 0\} \cap \{S_\ell = -k\})$

$= \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_\ell = -k \text{ et } X_{\ell+1} + \cdots + X_n = k)$

$= \mathbb{P}(S_\ell = -k)\mathbb{P}(S_{n-\ell} = k)$ par indépendance.

Or, comme $\ell = |k|$, $\mathbb{P}(S_\ell = -k) \geq \underbrace{\frac{1}{(2d)^\ell}}_{\text{un chemin particulier}} > 0.$

Donc $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{n \geq l+1} \mathbb{P}(S_{n-l} = k) \leq \frac{1}{\mathbb{P}(S_l = -k)} \sum_{n\geq l+1} \mathbb{P}(S_n = 0)$

Donc $\sum \mathbb{P}(S_n = k)$ a même nature que $\sum \mathbb{P}(S_n = 0)$.

Autre façon de voir la récurrence :

. Si états transients : $\mathbb{E}[N_k] = \sum \mathbb{P}(S_n = k) < +\infty$

Donc $\mathbb{P}(|S_n| \xrightarrow[n\infty]{} +\infty) = \mathbb{P}(\forall A \in \mathbb{R}^*, \exists n_0, \forall n \geq n_0, |S_n| \geq A)$

$$= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{A \in \mathbb{R}^*} \underbrace{\bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq n_0} (|S_n| \geq A)}_{\text{truc}}\Big)$$

pb : pas dénombrable.

Mais $\bigcap_{A\in\mathbb{R}^*} (\text{truc}) \supset \bigcap_{A \in \mathbb{N}^*} (\text{truc})$

Donc $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{A\in\mathbb{R}^*} (\text{truc})\Big) \geq \mathbb{P}\Big(\bigcap_{A\in\mathbb{N}^*} (\text{truc})\Big)$

Or, $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{A\in\mathbb{N}^*} (\text{truc})\Big) = \lim_{A\infty} \mathbb{P}(\exists n_0 \text{ tq } \forall n \geq n_0, |S_n| \geq A)$

$$= \lim_{A\infty} \underbrace{\mathbb{P}(\forall k, \text{tq } |k| \leq A, N_k \text{ fini})}_{=1}$$

car $\mathbb{E}[N_k] < \infty$ donc N_k p.s. fini.