

Table de $\mathcal{B}_4$

→ ne pas oublier de vérifier que les rep trouvées sont irred

→ $H = dx + y + z + t = 0$ ✓

$H^\perp = \text{Vect}(1, 1, 1, 1)$

→ $\mathcal{B}_4$ sur le cube (vérifier irred).

Prérequis

• $|\text{Conj}(G)| = |\chi_{\text{irred}}|$

• Conjugaison dans $\mathcal{B}_4$

• $\text{Isom}^+(C) \simeq \mathcal{B}_4$

Construction de la table de caractère de S_4 :

1^{ère} étape : nombre de classes de conjugaison

Deux permutations de S_4 sont conjuguéesssi elles ont m même décomposition en cycle à supports disjoints

En effet :

$\Rightarrow$ OK avec la formule de conjugaison

$\Leftarrow$ Plusieurs cas possibles :

. transposition : $(a\ b)$ et $(c\ d)$ conjuguées par σ telle que

$$\sigma(a) = c$$

$$\sigma(b) = d$$

existe puisque $a \neq b$ et $c \neq d$.

. 3 cycles : idem

. double transpo à support disjoint OK

□

classes de conjugaison de S_4 : $\{id\}$, $\{transpo\}$, $\{3\text{-cycles}\}$, $\{4\text{-cycles}\}$, $\{double\text{-transpo}\}$
 $\rightarrow 6$ $\rightarrow 8$ $\rightarrow 6$ $\rightarrow 3$

Donc autant de caractères irred (*)

	$\{id\}_1$	$(a,b)_6$	$(a,b,c)_8$	$(a,b,c,d)_6$	$(a,b)(c,d)_3$
χ_{triv}	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_H	3	1	0	-1	-1
χ_{cube}	3	-1	0	1	-1
χ_{last}	2	0	-1	0	2

} Etape 2

} Etape 3

} Etape 4

• Caractères de dimension 1 - Etape 2

$\rightarrow$ le trivial

$\rightarrow$ la signature, car un caractère de dimension 1 est un morphisme de G dans $\mathbb{C}^*$.

et aucun autre.

• Etape 3

Caractères issus de la représentation "naturelle"

$$\rho: S_4 \longrightarrow GL(\mathbb{C}^4)$$

$\sigma \longmapsto P_\sigma$ la matrice de permutation associée.

On cherche à décomposer cette rep en des sous-rep irred.

- On remarque que l'hyperplan de dimension 3

$$H := \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{C}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

est stable par $\mathcal{S}_4$. De même, son orthogonal, $\text{Vect}(1, 1, 1, 1)$ l'est aussi.

On a donc une potentielle décomposition en rep irréd

$$\mathbb{C}^4 = H \oplus \underbrace{\text{Vect}(1, 1, 1, 1)}_{H^\perp}$$

Il faut vérifier leur irréductibilité $\rightarrow$ par les caractères.

$$\chi_{\mathbb{C}} = \chi_H + \chi_{H^\perp}$$

- Or, $\chi_{\mathbb{C}}$ est calculable : c'est la trace des matrices de permutation, donc le nombre de points fixes.

$$\text{D'où } \chi_{\mathbb{C}} = [4, 2, 1, 0, 0]$$

- $\chi_{H^\perp}$ aussi car $\forall \sigma \in \mathcal{S}_4, \sigma|_{H^\perp} = \text{id}$
Donc $\chi_{H^\perp} = [1, 1, 1, 1, 1]$ (c'est la triviale, on l'a déjà).

$$\text{Finalement, } \chi_H = \chi_{\mathbb{C}} - \chi_{H^\perp} = [3, 1, 0, -1, -1]$$

On calcule le produit scalaire pour vérifier l'irréductibilité :

$$\begin{aligned} \langle \chi_H, \chi_H \rangle &= \frac{1}{|\mathcal{S}_4|} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_4} \chi_H(\sigma) \overline{\chi_H(\sigma)} = \frac{1}{24} \cdot (1 \cdot 3^2 + 6 \cdot 1^2 + 8 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1)^2) \\ &= \frac{1}{24} (9 + 6 + 6 + 3) = 1. \end{aligned}$$

Donc χ_H est irréductible $\rightarrow$ on le rajoute dans la table.

• Etape 4

On cherche les dimensions des deux derniers caractères.

$$\text{On a } \sum n_i^2 = 24 \text{ donc } 1 + 1 + 3^2 + n_4^2 + n_5^2 = 24$$

$$\textcircled{*} \text{ Peyré p 211 } \quad \text{ve } n_4^2 + n_5^2 = 13$$

$$\text{ve } \{n_4, n_5\} = \{2, 3\}$$

$\rightarrow$ celle de dimension 3

On cherche une réalisation de $\mathcal{S}_4$ comme des isomorphismes d'un espace de dimension 3 $\rightarrow \mathcal{S}_4 \simeq \text{Isom}^+(\mathbb{C})$

1.1) $\text{Isom}^+(\mathcal{C})$: isométries affines.

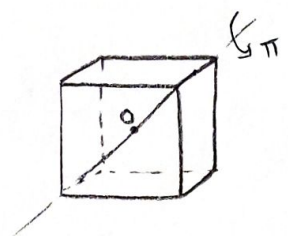
2

Donc on va considérer le cube de $\mathbb{R}^3$ centré en 0, pour se ramener à $O^+(\mathcal{C})$, qu'on connaît bien.

on note $\varphi: \mathcal{S}_4 \longrightarrow O^+(\mathcal{C})$ l'isomorphisme, action sur les grandes diagonales.

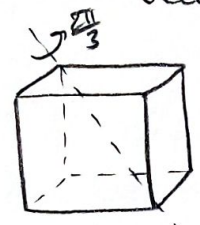
Alors $\varphi(e) = id$ donc $\chi_\varphi(e) = 3$

$\varphi(ab) =$ rotation d'angle π p/r à une médiane



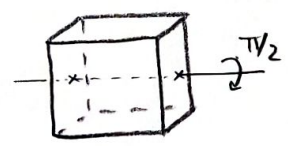
$$\text{donc } \chi_\varphi((a,b)) = \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$\varphi(abc) =$ rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ p/r à la diagonale qu'on veut laisser stable



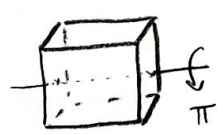
$$\begin{aligned} \chi_\varphi((a,b,c)) &= 1 + 2 \cos \frac{2\pi}{3} \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$\varphi(abcd) =$ rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ par rapport à une droite qui transperce les faces



$$\chi_\varphi((a,b,c,d)) = 1 + 2 \cos \frac{\pi}{2} = 1$$

$\varphi((ab)(cd)) =$ rotation d'angle π p/r à une droite qui transperce les faces



$$\chi_\varphi((ab)(cd)) = 1 + 2 \cos \pi = -1$$

D'où $\chi_\varphi = [3, -1, 0, 1, -1]$

on vérifie qu'elle est irréductible:

$$\frac{1}{24} (1 \times 9 + 6 \times 1 + 8 \times 0 + 6 \times 1 + 3 \times 1) = \frac{1}{24} (24) = 1.$$

→ on complète la table.

→ Le dernier caractère est obtenu grâce aux relations d'orthogonalité des colonnes $\oplus$ Peyré p 211

$$1 - 1 + 3 - 3 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$1 + 1 + 2x = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$1 - 1 - 3 + 3 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$1 + 1 - 3 - 3 + 2x = 0 \Rightarrow x = 2$$

□

D'où viennent les relations ?

$$|\text{Irr}(G)| = |\text{Conj}(G)|$$

on sait que $|\text{Irr}(G)| = \dim R_G(G)$ (fonctions centrales) car les χ_{Irr} forment une BON.
 $= |\text{Conj}(G)|$ car on exhibe une autre base, les χ_{C} de $\text{Conj}(G)$.
□

Les caractères forment une BON de $R_G(G)$

• orthogonalité

Découle du lemme de Schur. p 244 et suivantes Colmez