

# Couplage en algèbre et géométrie

ÉTIENNE AFFALOU  
ENS de Rennes - Année scolaire 2025-2026

Voici d'abord un tableau qui résume mes recasages par leçon pour la partie algèbre-géométrie.

| n°  | Nom raccourci de la leçon                             | Développements                                                    |
|-----|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| 101 | Groupe opérant sur un ensemble.                       | $\text{Aut}(Q_8)$ , $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$                    |
| 102 | Groupe des complexes de module 1. Racines de l'unité. | Suite polygones, Gauss-Lucas                                      |
| 103 | Conjugaison. Sous-groupes distingués, quotients.      | $\text{Aut}(Q_8)$ , $\mathfrak{A}_n$ simple                       |
| 104 | Groupes finis.                                        | $\text{Aut}(Q_8)$ , $\text{Aut}(\mathfrak{S}_n)$                  |
| 105 | Groupe des permutations d'un ensemble fini.           | $\text{Aut}(\mathfrak{S}_n)$ , $\mathfrak{A}_n$ simple            |
| 106 | Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dim finie.   | $\text{Aut}(Q_8)$ , Décomp polaire                                |
| 108 | Exemples de parties génératrices d'un groupe.         | $\text{Aut}(\mathfrak{S}_n)$ , $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$         |
| 120 | Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .                    | $\text{SO}_2(\mathbb{F}_q)$ , Grp d'ordre $p^2$ & $2p$            |
| 121 | Nombres premiers.                                     | $p = x^2 + 3y^2$ , Grp d'ordre $p^2$ & $2p$                       |
| 122 | Anneaux principaux.                                   | $p = x^2 + 3y^2$ , Berlekamp                                      |
| 123 | Corps finis.                                          | $\text{SO}_2(\mathbb{F}_q)$ , Fitting & cône nilpotent            |
| 125 | Extensions de corps.                                  | Dim du commutant, Berlekamp                                       |
| 127 | Exemples de nombres remarquables.                     | <b>Impasse</b>                                                    |
| 141 | Polynômes irréductibles. Corps de rupture.            | Berlekamp, item plan                                              |
| 142 | PGCD et PPCM, algorithmes de calcul.                  | Berlekamp, item plan                                              |
| 144 | Racines d'un polynôme. Fcts symétriques élémentaires. | Gerschgorin, Gauss-Lucas                                          |
| 148 | Dimension (finie) d'un espace vectoriel. Rang.        | Dim du commutant, Endo normaux                                    |
| 149 | Déterminant.                                          | $\text{SO}_3(\mathbb{F}_q)$ , Norme sur $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ |
| 150 | Polynômes d'endomorphisme en dim finie. Réduction.    | $\text{Aut}(Q_8)$ , Fitting & cône nilpotent                      |
| 151 | Sous-espaces stables en dim finie.                    | Dunford, Fitting & cône nilpotent                                 |
| 152 | Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.    | Dunford, Décomp polaire                                           |
| 153 | Valeurs propres, vecteurs propres.                    | Suite polygones, Gerschgorin                                      |
| 155 | Exponentielle de matrices.                            | Dunford, item plan                                                |
| 156 | Endomorphismes trigonalisables, nilpotents.           | Dunford, Fitting & cône nilpotent                                 |
| 157 | Matrices symétriques réelles, hermitiennes.           | Décomp polaire, Endo normaux                                      |
| 158 | Endomorphismes remarquables d'un ev euclidien.        | Décomp polaire, Endo normaux                                      |
| 159 | Formes linéaires et dualité en dimension finie.       | <b>Impasse</b>                                                    |
| 161 | Evs affines euclidiens : distances, isométries.       | Géné $\text{O}(E)$ & $\text{SO}(E)$ , Endo normaux                |
| 162 | Systèmes d'équations linéaires.                       | $\text{SO}_2(\mathbb{F}_q)$ , Dim du commutant                    |
| 170 | Formes quadratiques sur un ev de dim finie.           | Géné $\text{O}(E)$ & $\text{SO}(E)$ , $\text{SO}_3(\mathbb{F}_q)$ |
| 171 | Formes quadratiques réelles. Coniques.                | Géné $\text{O}(E)$ & $\text{SO}(E)$ , item plan                   |
| 181 | Convexité dans $\mathbb{R}^n$ .                       | Suite polygones, Gauss-Lucas                                      |
| 190 | Méthodes combinatoires, pbs de dénombrement.          | $\text{Aut}(Q_8)$ , Fitting & cône nilpotent                      |
| 191 | Exemples d'utilisation de techniques d'alg en géom.   | Iso exceptionnels, $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$                     |

Ensuite, le détail de mes développements avec leurs recasages dans les leçons concernées.

*Automorphisme*  $_8$  par  $\text{SL}_2(\mathbb{F}_3)$  :  
Recasé dans les leçons 101, 103, 104, 106, 150 et 190.

*Lemme de Fitting et cardinal du cône nil*  
Recasé dans les leçons 123, 150, 151, 156 et 190.

*Décompo*  
Recasé dans les leçons 106, 152, 157 et 158.

Algorithme de Berlekamp :

Recasé dans les leçons 122, 125, 141 et 142.

Réduction de

Recasé dans les leçons 148, 157, 158 et 161.

Décompo

Recasé dans les leçons 151, 152, 155 et 156.

Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré :

Recasé dans les leçons 101, 108 et 191.

Automorphisme

Recasé dans les leçons 104, 105 et 108.

Étude du groupe  $\mathrm{SO}_2(\mathbb{F}_q)$  :

Recasé dans les leçons 120, 123 et 162.

Générateurs de

Recasé dans les leçons 161, 170 et 171.

Suite de polygone

Recasé dans les leçons 102, 153 et 181.

Théorème de Gauss-Lucas et application :

Recasé dans les leçons 102, 144 et 181.

Dimension du commutant :

Recasé dans les leçons 125, 148 et 162.

SimPLICITÉ de

$n$  pour  $n = 3$  et  $n \geq 5$  :

Recasé dans les leçons 103 et 105.

Isomorphisme entre  $\mathrm{SO}_3(\mathbb{F}_q)$  et  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$  :

Recasé dans les leçons 149 et 170.

Groupe  $^2$  et  $2p$  :

Recasé dans les leçons 120 et 121.

Disque

Recasé dans les leçons 144 et 153.

Nombre

$^2 + 3y^2$  :

Recasé dans les leçons 121 et 122.