

Théorie de

ÉTIENNE AFFALOU
ENS de Rennes - Année scolaire 2025-2026

Dans ce document, vous trouverez des conseils pour réviser la théorie des groupes pour l'agrégation externe de mathématiques. Je m'appuie sur le rapport du jury des leçons de théorie des groupes, mais aussi sur mon expérience personnelle (passage en oral blanc sur la leçon 108 pendant la préparation, oral d'admission passé sur la leçon 101). Cependant, ce document est subjectif et je ne prétends pas comprendre à 100% les attentes du jury sur ce sujet. Je vous conseille de multiplier les lectures de retours d'oraux afin de vous faire votre propre avis sur la question.

Après quelques références commentées, je liste quelques groupes qui deviendront les meilleurs amis de l'agrégatif pendant toute une année. Je propose ensuite quelques développements en lien avec la théorie des groupes (le lecteur jugera seul des recasages adéquats). Enfin, je détaille quelques points importants des leçons de théorie des groupes à l'oral de l'agrégation (seule ma version des choses est présentée ; encore une fois, diversifiez vos sources).

1 La bibliographie

Pour préparer les leçons de théorie des groupes ou pour se remettre à jour sur le sujet, je conseille les livres suivants.

- **Daniel Perrin.** *Cours d'algèbre*. Ellipses, 1996.
Là où l'aventure de la théorie des groupes a commencé pour moi : excellent si vous préférez faire les preuves sans être trop pris par la main. Utile pour les autres leçons d'algèbre, il sera un très bon allié pour la préparation.
- **Pascal Ortiz.** *Exercices d'algèbre*. Ellipses, 2004.
Correction des exercices du Cours d'algèbre de Daniel Perrin. Les exercices sont intéressants, avancés et illustrent très bien les techniques inaugurées dans le premier chapitre. Les corrections sont détaillées et précises.
- **Josette Calais.** *Éléments de théorie des groupes*. PUF, 2014.
Très bon livre pour reprendre les bases, mais aussi pour approfondir les notions qui débordent du programme. Remarquable de détail, il conviendra mieux à ceux qui préfèrent être guidés pour les démonstrations.
- **Alain Debreil.** *Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes*. Calvage et Mounet, 2016.
Tout ce dont on peut rêver sur les groupes finis se trouve dans ce livre. On redécouvre nos groupes finis préférés grâce aux treillis. Éclairant, l'ouvrage contient aussi de superbes problèmes pour se tester sur des groupes méconnus.
- **Philippe Caldero, Jérôme Germoni.** *NH2G2 - tome premier*. Calvage et Mounet, 2017.
Cet ouvrage incontournable met en valeur les liens étroits entre groupes et topologie. En se plaçant sur les espaces de matrices, on comprend mieux les problèmes de classification qui nous occupent en réduction.
- **Philippe Caldero, Jérôme Germoni.** *NH2G2 - tome second*. Calvage et Mounet, 2018.
Sans doute plus difficile que le premier tome, le livre contient quand même bien des choses intéressantes. La partie sur les quaternions et celle sur la combinatoire algébrique, entre autres, sont mobilisables pour le concours.
- **Jean Delcourt.** *Théorie des groupes*. Dunod, 2019.
Rappels de cours et exercices corrigés sont habilement entremêlés. Parfaits pour s'entraîner, pour se remettre à niveau, mais aussi pour étoffer ses leçons avec des exemples et des applications.
- **Grégory Berhuy.** *Algèbre : Le grand combat*. Calvage et Mounet, 2020.
Sans parler du reste du livre, qui est parfait pour réviser l'algèbre de l'agrégation, les presque 400 pages de théorie des groupes couvrent tout ce qu'il faut savoir pour le concours, et un peu plus (théorie des représentations).
- **Alain Debreil, Rached Mneimné.** *Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ et ses métamorphoses*. Calvage et Mounet, 2020.
Tout sur $\mathfrak{S}_4$, le groupe à maîtriser parfaitement pour l'agrégation. Les liens avec la géométrie sont frappants et illustrés avec brio. Mention spéciale au chapitre X dans lequel on (re)découvre le fabuleux $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$.
- **Felix Ulmer.** *Théorie des groupes*. Ellipses, 2021.
Bon livre de généralités sur les groupes, pour revoir les bases mais aussi pour consolider les notions au programme. Les problèmes de classification des groupes finis de petit ordre, et des groupes simples finis sont évoqués.
- **Jean-Étienne Rombaldi.** *Mathématiques pour l'agrégation - Algèbre et géométrie*. De Boeck Supérieur, 2021.
Les bases de la théorie des groupes sont abordées, et on rencontre des thèmes importants tout au long du livre. On peut bien entendu utiliser le livre pour les autres leçons d'algèbre et de géométrie.

2 Les groupes à avoir en tête

Voici quelques groupes à garder en tête pour les exemples et les applications dans les leçons.

- Les groupes monogènes : $(\mathbb{Z}, +)$ et les groupes cycliques $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- Les groupes abéliens de type fini : connaître le théorème de classification.
- Les groupes symétriques : $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ et les groupes alternés $(\mathfrak{A}_n, \circ)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- Les groupes diédraux : $(D_n, \circ)$ d'ordre $2n$ pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.
- Les nombres complexes de module 1 : $(\mathbb{U}, \times)$ et ses sous-groupes finis qui sont cycliques.
- Les groupes linéaires : $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et les groupes spéciaux linéaires $(\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}), \times)$.
- Les groupes orthogonaux : $(O(q), \times)$ pour q définie positive, $(O_2(\mathbb{R}), \times)$, $(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$, $(O_3(\mathbb{R}), \times)$, $(\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}), \times)$.
- Le groupe des quaternions $\mathbb{H}_8$: le groupe contre-exemple.
- Le groupe additif $(\mathbb{F}_2[X], +)$: groupe infini qui ne contient (sauf 0) que des éléments d'ordre 2.

Ci-dessous, trois classes de groupes simples dont on peut parler à l'agrégation.

- Les groupes cycliques d'ordre premier $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$ où p est premier.
- Les groupes alternés $(\mathfrak{A}_n, \circ)$ pour $n \geq 5$.
- Les groupes $(\mathrm{PSL}_n(\mathbb{K}), \times)$ sauf $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2)$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$.
- Le groupe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ (la preuve de ce résultat constitue un développement).

3 Les développements de théorie des groupes

Je ne prétends pas dresser une liste exhaustive ; je propose simplement des idées de développements, parmi ceux que je connais de près ou de loin. Je les ai classés en trois catégories de difficulté, mais c'est bien sûr subjectif, et chacun se fera son idée sur la technicité de ces résultats.

D'abord des développements accessibles, qui conviendront aussi à ceux qui n'adorent pas les groupes.

- Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$ pour $n \neq 6$ (plusieurs preuves existent).
- Théorème de Dixon (avoir un exemple de groupe qui atteint la borne).
- Simplicité de $\mathfrak{A}_n$ pour $n = 3$ et $n \geq 5$ (savoir que $\mathfrak{A}_5$ est le seul groupe simple d'ordre 60).
- Classification des groupes d'ordre p^2 pour p premier (court, ajouter l'ordre du centre d'un groupe d'ordre p^3 ?).
- Générateurs des groupes linéaires (et connexité par arcs de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$).
- Isomorphismes exceptionnels (attention aux détails sur les groupes symétriques).
- Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{F}_q)$ (se recase bien dans d'autres leçons).
- Lemme de Fitting et cardinal du cône nilpotent (illustre bien l'utilité des actions de groupes).

Ensuite, des développements plus intéressants pour ceux qui apprécient la théorie des groupes.

- Action du groupe modulaire sur le demi-plan de Poincaré ($\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est engendré par deux matrices S et T).
- Théorèmes de Sylow (en montrant que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ a un p -Sylow).
- Automorphismes de $\mathbb{H}_8$ par $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$ (splendide, nécessite les théorèmes de Sylow).
- Classification des groupes d'ordre pq (peut-être un peu dangereux, sauf si vous adorez les produits semi-directs).
- Le seul groupe simple d'ordre 60 est $\mathfrak{A}_5$ (savoir que l'ordre intéressant suivant est 168).
- Automorphismes de $\mathfrak{S}_6$ (en prouvant $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5$).
- Les quaternions et $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ (c'est très beau, et utile pour représenter les rotations).
- Simplicité de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ (on a un exemple de groupe simple infini !).
- Probabilité que deux éléments commutent dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q)$ (à mettre en perspective avec le théorème de Dixon).
- Les groupes $\mathrm{SO}_3(\mathbb{F}_q)$ et $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_q)$ sont isomorphes (utilise des arguments sur les formes quadratiques).
- Les groupes $\mathrm{PSL}_4(\mathbb{F}_2)$ et $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_4)$ ne sont pas isomorphes (alors qu'ils sont simples de même ordre).

Enfin, une sélection de développements pour ceux qui aiment les résultats puissants.

- Théorème de Lie-Kolchin (c'est très long, et il est bon de savoir à quoi ça sert sur un exemple).
- Théorème de Burnside (sur la simplicité des groupes finis dont l'ordre est de la forme $p^\alpha q^\beta$).
- Théorème de structure des groupes abéliens finis (en utilisant les caractères, qui ne sont plus au programme).
- Critère de simplicité d'Iwasawa (s'applique ensuite aux groupes projectifs spéciaux linéaires).

4 Les leçons de théorie des groupes

L'année de préparation à l'agrégation est l'occasion d'organiser ses connaissances sur la théorie des groupes. La raison d'être des groupes est d'agir sur des ensembles pour tirer des informations tantôt sur le groupe étudié, tantôt sur l'ensemble considéré (leçon 101). La conjugaison joue alors un rôle crucial, puisqu'elle permet de mesurer le défaut de commutativité et de définir les quotients qui constituent une structure centrale en algèbre (leçon 103). On en déduit les problématiques liées à la classification des groupes simples finis. Les groupes finis fournissent nombre d'exemples élémentaires, et le théorème de Lagrange ainsi que ses réciproques partielles forment une partie cruciale de la théorie (leçon 104). Les groupes symétriques sont nos premiers exemples de groupes finis non abéliens, et leur étude est essentielle, tout groupe fini étant isomorphe à un sous-groupe d'un groupe symétrique (leçon 105). Une autre famille de groupes est constituée des groupes linéaires, et leurs propriétés algébriques ne doivent pas éclipser leur utilité en algèbre linéaire, en réduction et en géométrie (leçon 106). Pour tous ces groupes, la présence d'une partie génératrice formée d'éléments particuliers est extrêmement utile, notamment pour démontrer la simplicité de certains d'entre eux lorsque les éléments en question sont conjugués (leçon 108).

Notez que j'omets délibérément la leçon 102 sur les nombres complexes de module 1 qui est sans aucun doute intéressante, mais qui, selon moi, n'est pas tellement orientée vers la théorie des groupes (voir le rapport du jury). Je vais maintenant donner quelques idées de choses à raconter, rangées par leçon. Mais d'abord un conseil qui vaut pour toutes les leçons à l'agrégation externe : faites une annexe, qui illustre le propos que vous tenez ou des résultats du plan. Cela rend l'exposé en six minutes plus vivant, et cela permet de mettre en valeur les points intéressants du plan à moindre coût.

- **101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.**

Au risque de paraphraser le rapport du jury, je conseille de présenter les bases dans une première partie, qui contiendrait donc les premiers exemples d'actions de groupes, le théorème de Cayley, l'illustration des orbites en utilisant l'exemple des sous-groupes cycliques des groupes symétriques et une sous-partie qui parle des dénombrements usuels obtenus par action de groupe, notamment en utilisant la formule de Burnside (colliers de perles, nombre moyen de points fixes d'une permutation).

Les p -groupes finis ont toute leur place dans cette leçon : on obtient le résultat sur le centre des p -groupes finis, et le théorème de Cauchy si utile pour les groupes finis. Ces p -groupes finis apparaissent naturellement sous la forme de p -sous-groupes de Sylow des groupes finis. Si vous décidez de parler des théorèmes de Sylow, préférez ici la preuve par action de groupe, et donnez l'application classique à la non-simplicité de certains groupes finis. Remarquez que d'autres applications existent. Par exemple, compter les p -Sylow de $\mathfrak{S}_p$ permet de démontrer une partie du théorème de Wilson, et la conjugaison des p -Sylow assure un critère de co-trigonalisabilité pour les sous-groupes d'ordre $q^{n(n-1)/2}$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$. Enfin, l'action des groupes linéaires sur les sous-espaces vectoriels de dimension fixée permet des dénombrements intéressants sur les corps finis. En particulier, compter le nombre de droites vectorielles sert à démontrer des isomorphismes exceptionnels entre groupes linéaires finis et groupes symétriques.

Enfin, il semble sage de présenter des situations où les groupes permettent de classer des objets, par exemple en algèbre linéaire (équivalence et rang), en réduction (similitude et invariants de similitude) ou en géométrie (définition des angles dans le plan ou dans l'espace par exemple). On peut aussi envisager de parler du demi-plan de Poincaré pour démontrer que le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est engendré par deux matrices. Cela donne naissance à un pavage magnifique du demi-plan de Poincaré.

- **103 : Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.**

Je précise ce que j'ai compris du principe de transport par conjugaison évoqué dans le rapport du jury. On pourrait résumer ce principe en disant que la nature d'un objet est inchangée par conjugaison. Les exemples de ce principe ne manquent pas : le type d'une permutation ne change pas par conjugaison (les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ sont donc connues), conjuguer une transvection de droite D et d'hyperplan H par un élément u du groupe linéaire donne une transvection de droite $u(D)$ et d'hyperplan $u(H)$ (application au centre du groupe linéaire), conjuguer une rotation d'axe D par u donne une rotation d'axe $u(D)$, et plus simplement, l'ordre d'un élément fini est préservé par conjugaison.

La conjugaison sert aussi à démontrer que certains groupes sont simples. On cherche d'abord une famille génératrice

constituée d'éléments qui ont beaucoup de points fixes (3-cycles dans $\mathfrak{A}_n$, transvections dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$), et on essaye de démontrer que ces éléments particuliers sont conjugués. Ensuite, pour montrer que le groupe est simple, il suffit de prendre un sous-groupe distingué non-trivial, et de montrer qu'il contient au moins un élément du type particulier. En effet, il contiendra tous les éléments de ce type comme H est distingué, puis tout le groupe puisque ces éléments engendrent le groupe tout entier.

Là encore, on peut parler des théorèmes de Sylow. En effet, les p -Sylow d'un groupe sont conjugués, ce qui donne un critère de non-simplicité. Mentionnons le critère suivant qui apparaît assez rarement dans la littérature. Si G est un groupe simple tel que n_p est le nombre de p -Sylow de G , alors G s'injecte dans $\mathfrak{S}_p$, et même $\mathfrak{A}_p$. En effet, l'action par conjugaison sur les p -Sylow est non-triviale, d'où un morphisme non-trivial $G \rightarrow \mathfrak{S}_p$. Mais G est simple, donc le noyau de ce morphisme est nécessairement trivial. On obtient l'amélioration en utilisant la signature. Ainsi, on a nécessairement $|G| \mid (n_p)!/2$, ce qui peut être utile pour éliminer certaines possibilités pour n_p .

- **104 : Groupes finis. Exemples et applications.**

On peut par exemple décider de mettre l'accent sur les réciproques partielles du théorème de Lagrange, après avoir illustré par quelques exemples des dénombrements classiques liés aux actions de groupes. Les groupes cycliques, puis les groupes abéliens finis vérifient bien la réciproque du théorème de Lagrange.

Les groupes finis non-abéliens ne vérifient pas la réciproque du théorème de Lagrange, comme le montre l'exemple de $\mathfrak{A}_4$. On étudie alors les propriétés de base des groupes symétriques (voir leçon 105). Les groupes linéaires finis sont des groupes non-abéliens très intéressants (application au calcul du nombre de sous-espaces de dimension fixée, isomorphismes exceptionnels) et fournissent de bons exemples (vive $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$!).

Les p -groupes vérifient la réciproque du théorème de Lagrange. Les théorèmes de Sylow donnent une réciproque partielle bien utile (par exemple, un groupe d'ordre 15 est cyclique, car il n'a qu'un seul 3-Sylow et qu'un seul 5-Sylow). On peut parler de la curiosité $\mathbb{H}_8$ qui a tous ses sous-groupes distingués, mais qui n'est pas abélien.

C'est aussi l'occasion d'étudier les groupes diédraux, pour faire le lien avec la géométrie plane. Ces groupes apparaissent naturellement lorsque l'on se pose des questions de classification des groupes de petit ordre. On pourra dresser une table des groupes d'ordre plus petit que 9 sans trop de difficulté.

Disons-le clairement, cette leçon est extrêmement vaste, et les choix que vous faites doivent être éclairés. Préparer ce sujet permet aussi de s'armer en exemples pour les autres leçons, donc *faites-le* comme dirait l'autre.

- **105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.**

Même si on décide de parler beaucoup de la structure même des groupes symétriques, il faut donner quelques applications. Le rapport du jury donne de bons conseils à ce sujet, c'est une bonne idée de le suivre (comme souvent).

Comme dit précédemment, on peut motiver l'étude des groupes symétrique par le théorème de Cayley. Les définitions et concepts de base doivent bien sûr être évoqués. On pourra faire une sous-partie sur les parties génératrices des groupes symétriques (écriture en produit de cycles à supports disjoints, transpositions, transpositions d'une certaine forme, une transposition et un n -cycle). À ce sujet, on notera que le nombre minimal de transpositions pour engendrer $\mathfrak{S}_n$ est égal à $n - 1$ (question d'oral classique). On pensera à calculer les centres et les groupes dérivés et à donner les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$. La simplicité des groupes alternés me semble plus ou moins incontournable.

- **106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.**

Il faut absolument parler des transvections, des dilatations, et des liens avec l'algorithme du pivot de Gauss. Ces familles génératrices permettent d'obtenir des informations algébriques sur le centre et le groupe dérivé, mais aussi topologiques dans le cas où le corps de base est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On définira les groupes projectifs linéaires et projectifs spéciaux linéaires, pour au moins énoncer la simplicité de ces derniers.

Dans le cas des corps finis, on pourra présenter des isomorphismes exceptionnels et expliquer comment, en injectant $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$, on montre le premier théorème de Sylow. Autrement, on reprendra les éléments des autres leçons pour les actions du groupe linéaire. On pourra aussi approfondir les propriétés topologiques sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec la décomposition polaire et la compacité du groupe orthogonal par exemple.

- **108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.**

L'étude des groupes monogènes et la définition du sous-groupe dérivé trouvent certainement leur place au début de cette leçon. On peut alors parler des groupes symétriques en mobilisant la leçon 105, des groupes linéaires en utilisant la leçon 106, et des groupes orthogonaux avec ses réflexions et ses renversements. La méthode introduite dans la leçon 103 pour démontrer qu'un groupe est simple pourra être rappelée ici.

En géométrie, les groupes diédraux sont engendrés par deux éléments et le groupe modulaire qui agit sur le demi-plan de Poincaré peuvent être utilement évoqués. Enfin, le groupe $\mathbb{H}_8$ et la détermination de son groupe d'automorphismes logent très bien dans cette leçon en tant qu'item du plan.

Bon courage à tous, vive la théorie des groupes, et amusez-vous bien !