

THÉORÈME DE LIE-KOLCHIN

ÉTIENNE AFFALOU

05/09/2024

Dans ce document, nous allons démontrer le théorème de Lie-Kolchin suivant.

THÉORÈME Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit G un sous-groupe connexe résoluble de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors, il existe une base de $\mathbb{C}^n$ qui trigonalise tous les éléments de G .

IDÉE DE LA PREUVE : On commence par écarter le cas où G est abélien, en montrant la proposition 1. On aura ensuite besoin de la proposition 2 relative au groupe dérivé d'un sous-groupe connexe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

PROPOSITION 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall (M, N) \in G^2, MN = NM$. Alors, il existe une base de $\mathbb{C}^n$ qui trigonalise tous les éléments de G .

PREUVE DE LA PROPOSITION 1 : On montre le résultat par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$.

L'initialisation $n = 1$ est évidente étant donné que toutes les matrices sont triangulaires dans ce cas.

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. On suppose que pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, pour toute famille G de matrices de $\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ qui commutent deux à deux, il existe une base de $\mathbb{C}^k$ qui trigonalise tous les éléments de G .

Montrons que pour toute famille G de matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui commutent deux à deux, il existe une base de $\mathbb{C}^n$ qui trigonalise tous les éléments de G .

Soit donc G une famille de matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui commutent deux à deux. Si toutes les matrices de G sont scalaires, le résultat est vérifié en ne changeant pas de base.

Sinon, on peut choisir $g \in G$ telle que g possède au moins deux valeurs propres. Ainsi, notre élément g possède une valeur propre λ telle que si on note $V = \ker(g - \lambda \mathrm{id})$ et $d = \dim(V)$, on a $d \in \{1, \dots, n-1\}$.

Montrons que V est stable par tout élément de G . Soit $f \in G$. Pour tout $v \in V$, on a

$$gf(v) = fg(v) = f(\lambda v) = \lambda f(v)$$

ce qui montre que $f(v) \in V$. Ainsi, V est bien stable par tous les éléments de G .

On a donc l'existence d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ telle que $(e_1, \dots, e_d)$ est une base de V . Dans cette base, les éléments de $f \in G$ s'écrivent sous la forme

$$f = \begin{pmatrix} A_f & * \\ 0 & B_f \end{pmatrix}$$

avec $A_f \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ et $B_f \in \mathrm{GL}_{n-d}(\mathbb{C})$. En effectuant un calcul matriciel par blocs, on se rend compte que les matrices A_f qui correspondent aux éléments $f \in G$ commutent entre elles, et qu'il en est de même pour les matrices B_f .

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à ces deux familles de matrices pour obtenir une base $(e'_1, \dots, e'_d)$ de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $e_1, \dots, e_d$ telle que les matrices A_f qui correspondent aux éléments $f \in G$ sont triangulaires supérieures, et une base $(e'_{d+1}, \dots, e'_n)$ de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $e_{d+1}, \dots, e_n$ telle que les matrices B_f qui correspondent aux éléments $f \in G$ sont triangulaires supérieures.

De cette façon, on obtient une base $(e'_1, \dots, e'_n)$ de $\mathbb{C}^n$ telle que les matrices de G sont triangulaires dans cette base. On a ainsi montré l'hérédité dans notre preuve par récurrence, et la proposition 1 est bien établie.

PROPOSITION 2 Soit G un sous-groupe connexe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors, le groupe dérivé $D(G)$ est connexe.

PREUVE DE LA PROPOSITION 2 : Notons S l'ensemble des commutateurs de G .

Remarquons que l'application $d : G \times G \rightarrow G$ définie par $\forall (g, h) \in G \times G, d(g, h) = ghg^{-1}h^{-1}$ est continue en vertu

de la continuité du produit matriciel et du passage à l'inverse (pour le passage à l'inverse, remarquer que l'inverse d'une matrice de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ vaut l'inverse de son déterminant fois la transposée de sa comatrice, et donc les coefficients de l'inverse s'expriment comme une fraction rationnelle des coefficients de la matrice de départ et le dénominateur de cette fraction rationnelle est non nul). Mais par définition de S , on a $S = d(G \times G)$. Donc comme $G \times G$ est connexe dans $\text{GL}_n(\mathbb{C}) \times \text{GL}_n(\mathbb{C})$ muni de la topologie produit (G est connexe), S est connexe.

Si $m \in \mathbb{N}^*$, on note S_m l'ensemble des $s_1 \cdots s_m$ où $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, $s_i \in S$. Remarquons que S étant connexe, S^m est encore connexe. Mais l'application $f : \text{GL}_n(\mathbb{C})^m \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ définie par $\forall A_1, \dots, A_m \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, $f(A_1, \dots, A_m) = A_1 \cdots A_m$ est continue et $S_m = f(S^m)$ donc S_m est connexe.

En remarquant que l'inverse d'un commutateur est encore un commutateur, on établit l'égalité

$$D(G) = \{I_n\} \cup \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} S_m.$$

Or $\{I_n\}$ est connexe et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $I_n \in S_m$. En effet, I_n est un commutateur donc $I_n \in S$ et pour $m \in \mathbb{N}^*$, $I_n = I_n \cdots I_n$ (m fois). Ainsi, $D(G)$ est une réunion de connexes qui ont un élément en commun.

Finalement, $D(G)$ est bien connexe.

PREUVE DU THÉORÈME : Si G est abélien, la proposition 1 donne le résultat. En particulier, le cas $n = 1$ est traité. Montrons par récurrence forte sur n que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, pour tout sous-groupe connexe résoluble G de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe une base de $\mathbb{C}^n$ qui trigonalise tous les éléments de G .

La remarque qui précède assure que l'initialisation au cas $n = 1$ est vérifiée.

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Supposons que $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$, pour tout sous-groupe connexe résoluble G de $\text{GL}_k(\mathbb{C})$, il existe une base de $\mathbb{C}^k$ qui trigonalise tous les éléments de G . Soit G un sous-groupe connexe résoluble de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Par la proposition 1, on peut supposer G non abélien.

En particulier, comme G est résoluble, l'ensemble $\{m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, D^m(G) = \{I_n\}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$.

Soit m le plus petit élément de cet ensemble. On pose $H = D^{m-1}(G)$. Par construction, $H \neq \{I_n\}$.

Pour se ramener à l'hypothèse de récurrence, on cherche un sous-espace V de $\mathbb{C}^n$ stable par tous les éléments de G .

Remarquons que H est abélien car $D(H) = D^m(G) = \{I_n\}$. Donc par la proposition 1, il existe une base de $\mathbb{C}^n$ qui trigonalise tous les éléments de H . Le premier vecteur x de cette base engendre donc une droite stable par tous les éléments de H . Ce vecteur x est un vecteur propre commun aux éléments de H .

Notons P l'ensemble des vecteurs propres communs aux éléments de H . On vient de montrer que $P \neq \emptyset$.

Notons que H est distingué dans G . En effet, $D(G)$ est caractéristique dans G et le fait d'être caractéristique est transitif. Donc H est caractéristique et en particulier, H est distingué dans G . Ainsi, si $h \in G$ et $g \in G$,

$$h(g(x)) = g(g^{-1}hg)(x) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$$

où x est toujours l'élément de P exhibé précédemment et λ est la valeur propre de $g^{-1}hg$ associée à x .

Cela montre que $g(x) \in P$ (g est inversible donc $g(x) \neq 0$).

Par définition de P si $y \in P$ l'application $\Lambda_y : H \rightarrow \mathbb{C}$ qui associe à un élément de H associe sa valeur propre en y est bien définie. En fait, si $h \in H$, on peut définir $L_h : G \rightarrow \mathbb{C}$ par $\forall g \in G$, $L_h(g) = \Lambda_{g(x)}(h) = \Lambda_x(ghg^{-1})$. Cette application est bien définie car $g(x) \in P$ par ce qui précède et L_h est continue, car composée de la conjugaison $g \mapsto ghg^{-1}$ et de Λ_x qui est continue sur l'ensemble des éléments de H qui stabilisent la droite engendrée par x .

Ainsi, pour tout $h \in H$, l'image de G par L_h est un connexe de $\mathbb{C}$ (G est supposé connexe), ce connexe étant fini (il est inclus dans le spectre de h). Ce connexe discret est donc un singleton.

Notons V l'espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $g(x)$ où $g \in G$.

Comme V est engendré par des éléments qui sont stables par G , V est lui-même stable par G et V est non trivial car $x \in V$ (en effet, si $h \in H$, $h(x) = \lambda x$ et donc $(1/\lambda)\lambda x = x \in V$ par combinaison linéaire).

Montrons que $V \neq \mathbb{C}^n$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que $V = \mathbb{C}^n$.

Les éléments de H sont donc des homothéties. Or, les éléments de H sont aussi des commutateurs (G n'est pas abélien donc $D(G) \neq \{I_n\}$ et donc $m-1 \geq 1$), donc leur déterminant vaut nécessairement 1. Ainsi, les rapports des homothéties de H sont des racines n -ièmes de l'unité (si $h \in H$ est une homothétie de rapport λ , alors $\det(h) = \lambda^n$). Notre groupe H est alors fini, et par la proposition 2 il est également connexe. Ainsi, H est un singleton, ce qui est faux par construction de m . On dispose donc d'un sous-espace V de $\mathbb{C}^n$ qui est stable par tous les éléments de G , et qui n'est ni $\{0\}$, ni $\mathbb{C}^n$ tout entier.

Il suffit alors pour conclure la preuve de choisir un supplémentaire W de V , de sorte que dans une base adaptée à la décomposition $V \oplus W$, les éléments de g de G s'écrivent sous la forme

$$g = \begin{pmatrix} \rho_g & * \\ 0 & \rho'_g \end{pmatrix}$$

avec $\rho_g \in \text{GL}(V)$ est la restriction de g à V et $\rho'_g \in \text{GL}(W)$ est la projection sur W parallèlement à V de la restriction de g à W . Les fonctions $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ et $\rho' : G \rightarrow \text{GL}(W)$ définie par $\forall g \in G, \rho(g) = \rho_g$ et $\rho'(g) = \rho'_g$ sont des morphismes continus, donc $\rho(G)$ est un sous-groupe connexe résoluble de $\text{GL}(V)$ et $\rho'(G)$ est un sous-groupe connexe résoluble de $\text{GL}(W)$. Appliquer l'hypothèse de récurrence sur ces deux images nous permet d'obtenir une base qui trigonalise tous les éléments de G en concaténant les deux bases obtenues.

RÉSUMÉ DE LA PREUVE : Pour montrer le théorème, on a raisonné par récurrence forte sur n . L'initialisation était évidente et pour l'hérédité, on a écarté le cas abélien bien connu (c'est la proposition 1). On a ensuite recherché un sous-espace vectoriel non trivial V de $\mathbb{C}^n$ qui est stable par tous les éléments du groupe. La proposition 2 qui nous a permis d'assurer l'existence de V (on a utilisé la proposition 1 ici aussi). Ensuite, on applique simplement l'hypothèse de récurrence deux fois (sur V et sur un supplémentaire de V) et un argument de concaténation de bases achève la démonstration.

RÉFÉRENCES :

- Algèbre corporelle, *Antoine Chambert-Loir*
- Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1, *Philippe Caldero* et *Jérôme Germoni*
- Théorème de Lie-Kolchin, version de *MORIN* <https://agreg-maths.fr/users/389>