Théorie des groupes
Quelques contre-exemples

AFFALOU Étienne

Novembre 2023

L'objet de ce très court article est de lister des contre-exemples classiques qui apparaissent en théorie des groupes.

$\star$ Si G est un groupe abélien, alors tous ses sous-groupes sont distingués. Inversement, si les sous-groupes d'un groupe G sont tous distingués, G est-il nécessairement abélien ?

> PROPOSITION Le groupe des quaternions n'est pas abélien et ses sous-groupes sont tous distingués.

PREUVE : Les sous-groupes de $Q_8 = \{\pm 1, \pm I, \pm J, \pm K\}$ sont les suivants :

$$\{1\}, \{\pm 1\}, \{\pm 1, \pm I\}, \{\pm 1, \pm J\}, \{\pm 1, \pm K\} \text{ et } Q_8$$

Montrons qu'ils sont tous distingués dans Q_8.
- $\{1\}$ et Q_8 sont bien entendu distingués dans Q_8.
- $\{\pm 1, \pm I\}, \{\pm 1, \pm J\}$ et $\{\pm 1, \pm K\}$ sont distingués dans Q_8 car d'indice 2 dans Q_8.
- $\{\pm 1\}$ est le centre de Q_8 donc $\{\pm 1\}$ est distingué dans Q_8.

Pourtant, Q_8 n'est pas un groupe abélien ($Z(Q_8) \neq Q_8$).

Un groupe non abélien dans lequel tout sous-groupe est distingué est dit hamiltonien.
Q_8 est le plus petit groupe hamiltonien fini.

$\star$ D'après le théorème de Lagrange, si G est un groupe fini, alors l'ordre des sous-groupes de G divise $|G|$. Inversement, si G est d'ordre n et si d est un diviseur de n, G a-t-il nécessairement un sous-groupe d'ordre d ?

> PROPOSITION Le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$ est d'ordre 12 mais n'a pas de sous-groupe d'ordre 6.

PREUVE : Supposons que $\mathfrak{A}_4$ a un sous-groupe H d'ordre 6.
À isomorphisme près, $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\mathfrak{S}_3$ sont les seuls groupes d'ordre 6 (voir classification des groupes d'ordre pq).
Donc, H a au moins un élément $\sigma \in \mathfrak{A}_4$ d'ordre 2. La connaissance des éléments d'ordre 2 de $\mathfrak{A}_4$ nous donne la forme de σ : c'est une double transposition. Or, H est d'indice 2 dans $\mathfrak{A}_4$, donc il est distingué dans $\mathfrak{A}_4$.
Ainsi, le groupe V des doubles transpositions est contenu dans H car on retrouve toutes les doubles transpositions en conjuguant par des éléments de $\mathfrak{A}_4$. Ce groupe est d'ordre 4 et est contenu dans H donc c'est un sous-groupe d'ordre 4 de H. C'est impossible par le théorème de Lagrange (4 ne divise pas 6).
Finalement, $\mathfrak{A}_4$ n'a pas de sous-groupe d'ordre 6.

Le théorème de Feit-Thompson fournit d'autres contre-exemples.
Ce théorème affirme que tous les groupes simples non cycliques sont d'ordre pair.
En particulier, les groupes simples non cycliques n'ont pas de sous-groupe d'indice 2.

$\star$ Les sous-groupes propres d'un groupe cyclique sont cycliques. Inversement, si tous les sous-groupes propres d'un groupe sont cycliques, le groupe est-il nécessairement cyclique ?

> PROPOSITION Le groupe de Klein $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ n'est pas cyclique et tous ses sous-groupes propres le sont.

PREUVE : Un sous-groupe propre de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est d'ordre 2 d'après le théorème de Lagrange.
On remarque les seuls sous-groupes d'ordre 2 du groupe de Klein sont les sous-groupes $\langle(\overline{1}, \overline{0})\rangle$, $\langle(\overline{0}, \overline{1})\rangle$ et $\langle(\overline{1}, \overline{1})\rangle$ qui sont cycliques. Cependant, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ n'a pas d'élément d'ordre 4.

Le groupe de Klein apparaît également dans d'autres contre-exemples.

$\star$ Un sous-groupe caractéristique est distingué. La réciproque est fausse.

> PROPOSITION Le sous-groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \{(\overline{0}, \overline{0})\}$ de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est distingué mais pas caractéristique.

PREUVE : $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \{(\overline{0}, \overline{0})\}$ est un sous-groupe du groupe abélien $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ donc $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \{(\overline{0}, \overline{0})\}$ est distingué.
On introduit la bijection

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\ & & (x, y) & \longmapsto & (y, x) \end{array}$$

Un calcul rapide montre que φ est un morphisme, et donc que φ est un automorphisme de G.
Cependant, $\varphi((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \{(\overline{0}, \overline{0})\})$ n'est pas inclus dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \{(\overline{0}, \overline{0})\}$. Donc $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times \{(\overline{0}, \overline{0})\}$ n'est pas caractéristique.

Il est important de connaître ce contre-exemple.

$\star$ Un groupe peut-il être isomorphe à l'un de ses sous-groupes ?

PROPOSITION $(2\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, et $(\mathbb{Z}, +)$ est isomorphe à $(2\mathbb{Z}, +)$.

PREUVE : Soit φ l'application définie par

$$\begin{array}{rcrcl} \varphi & : & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 2\mathbb{Z} \\ & & n & \longmapsto & 2n \end{array}$$

C'est bien entendu une bijection (on trouve facilement son inverse) et c'est un morphisme de groupe (par distributivité de $\times$ sur $+$). φ est donc un isomorphisme.

$(\mathbb{Z}, +)$ est même isomorphe à tous ses sous-groupes non triviaux.

$\star$ Un groupe dont tous les sous-groupes propres sont cycliques est-il nécessairement abélien ?

PROPOSITION Les sous-groupes propres de Q_8 sont cycliques, mais Q_8 n'est pas abélien.

PREUVE : Effectivement, les sous-groupes propres de Q_8 sont $\langle -1 \rangle$, $\langle I \rangle$, $\langle J \rangle$ et $\langle K \rangle$.

Le contre-exemple du groupe de Klein ne fonctionnait plus ici.

$\star$ Un sous-groupe distingué dans un sous-groupe distingué dans un groupe G est-il nécessairement distingué dans G ?

PROPOSITION Dans $\mathfrak{S}_4$, un groupe engendré par une double transposition est distingué dans le groupe des doubles transpositions, et le groupe des doubles transpositions est distingué dans $\mathfrak{S}_4$. Cependant, un groupe engendré par une double transposition n'est pas distingué dans $\mathfrak{S}_4$.

PREUVE : Soit τ une double transposition de $\mathfrak{S}_4$. Le groupe $\langle \tau \rangle$ est distingué dans le groupe des doubles transposition car il est d'indice 2 dans celui-ci. Le groupe des doubles transpositions est distingué dans $\mathfrak{S}_4$ car conjuguer une double transposition par un élément de $\mathfrak{S}_4$ donne encore une double transposition.
En conjuguant par une transposition bien choisie, on remarque que $\langle \tau \rangle$ n'est pas distingué dans $\mathfrak{S}_4$.

Connaître ce contre-exemple est indispensable.

$\star$ Quand p est un nombre premier, il n'y a qu'un seul groupe d'ordre p à isomorphisme près. Inversement, existe-t-il un entier n non premier qui vérifie la propriété "il n'y a qu'un seul groupe d'ordre n à isomorphisme près" ?

PROPOSITION Un groupe d'ordre 15 est isomorphe à $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

PREUVE : Le nombre n_5 de 5-Sylow d'un tel groupe divise 3 et est congru à 1 modulo 5, donc vaut 1.
De plus, le nombre n_3 de 3-Sylow vérifie $n_3 \mid 5$ et $n_3 \equiv 1$ $[3]$ donc $n_3 = 1$.
On dispose donc d'un 5-Sylow distingué et d'un 3-Sylow distingué. Ainsi, notre groupe est isomorphe au produit direct de ces deux sous-groupes. Ils sont d'ordre premier donc on obtient le résultat en vertu du théorème chinois ($\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$).

C'est un cas particulier de la classification des groupes d'ordre pq.

$\star$ Si G est un groupe d'ordre premier, ses seuls sous-groupes sont le groupe trivial et lui-même. Inversement, si les seuls sous-groupe d'un groupe fini sont le groupe trivial et lui-même, l'ordre du groupe est-il nécessairement premier ?

PROPOSITION Si les seuls sous-groupes d'un groupe fini sont $\{1\}$ et lui-même, l'ordre du groupe est premier.

PREUVE : On sous-entend dans l'énoncé de cette proposition que le groupe G n'est pas trivial.
Soit donc $x \in G$ différent du neutre. Ainsi, $\langle x \rangle$ est un sous-groupe non trivial de G. Si l'ordre de x n'est pas égal à l'ordre du groupe, on obtient un sous-groupe qui n'est ni $\{1\}$, ni G ce qui est impossible.
Donc G est cyclique. L'ordre de G est nécessairement premier car on aurait l'existence d'un sous-groupe différent de $\{1\}$ et de G dans le cas contraire (on connaît les sous-groupes d'un groupe cyclique).

*On a donc une condition nécessaire et suffisante sur l'ordre d'un groupe
pour que ses seuls sous-groupes soient le groupe trivial et lui-même.*

Certains contre-exemples proviennent directement de [**1**]. D'autres se trouvent dans [**2**], [**3**] ou [**4**].

Références :

- [**1**] Les contre-exemples en mathématiques, *Bertrand Hauchecorne*
- [**2**] Exercices d'algèbre, *Pascal Ortiz*
- [**3**] Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes, *Alain Debreil*
- [**4**] Théorie des groupes, *Félix Ulmer*