Théorie des groupes
Graphes de Cayley

AFFALOU Étienne

Octobre 2023

Table des matières

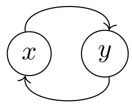
Dans un cours de théorie des groupes, on mentionne très souvent les tables de Cayley qui donnent les règles de calcul dans un groupe fini. Mais dès que l'ordre du groupe devient grand, remplir une telle table devient difficile et le résultat obtenu n'est pas toujours très compréhensible. On va présenter ici un outil pour visualiser les groupes de type fini : les graphes de Cayley. L'élément neutre d'un groupe sera noté e.

1 C'est quoi ?

Avant de se lancer dans la définition de graphe de Cayley, rappelons la définition d'un graphe orienté.

Définition Un graphe orienté est un couple (S, A) où
- S est un ensemble, appelé ensemble des sommets du graphe.
- $A \subset S^2$ est l'ensemble des arrêtes du graphe.

Remarque : Les arrêtes sont donc orientées car si x et y sont deux sommets distincts, $(x, y) \neq (y, x)$.



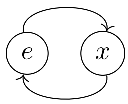
L'arrête (x, y) en haut est différente de l'arrête (y, x) en bas.

On va maintenant associer un graphe orienté à tout groupe de type fini.

Définition Soit G un groupe de type fini. Soit O une partie génératrice finie de G.
On note $\mathrm{Cay}(G, O)$ le graphe orienté (S, A) tel que
- les éléments de S sont exactement les éléments de G,
- pour tout $x \in S$ et pour tout $o \in O$, $(x, xo) \in A$.

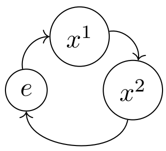
De plus, on distingue les arrêtes selon le générateur o tel que $(x, xo) \in A$.

Ainsi, le graphe $\mathrm{Cay}(G, O)$ nous dit sur quel élément s'envoie x lorsqu'il est multiplié à droite par un générateur de G.
Donnons les graphes de Cayley des groupes cycliques d'ordre 2 et 3 et 4 pour comprendre.
Si G est cyclique, il est engendré par un seul élément x. La flèche désigne donc une multiplication à droite par x.



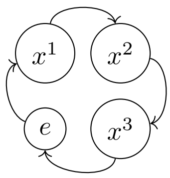
Le graphe de Cayley du groupe cyclique d'ordre 2 engendré par x.

On voit sur le graphe que $ex = x$ et que $x^2 = e$. Pour un groupe cyclique d'ordre 3, le graphe devient le suivant :



Le graphe de Cayley du groupe cyclique d'ordre 3 engendré par x.

On a bien $ex = x$, $xx = x^2$ et $x^2x = e$. En fait, pour un groupe cyclique, le graphe de Cayley fait une boucle.



Le graphe de Cayley du groupe cyclique d'ordre 4 engendré par x.

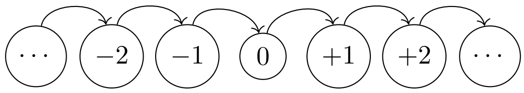
Dans la suite, on va donner les graphes de Cayley de certains groupes finis.

2 Exemples

On commence par $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

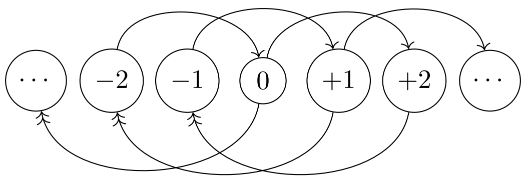
2.1 Les groupes monogènes

La notation est ici additive. Voici un graphe de Cayley de $\mathbb{Z}$:



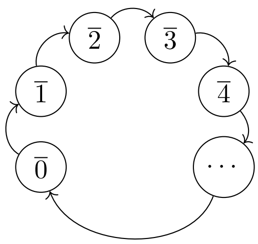
Un graphe de Cayley de $\mathbb{Z}$ avec 1 comme générateur.

Mais on peut aussi dire que $\mathbb{Z}$ est engendré par 2 et -3 ce qui donne le graphe suivant (la flèche simple est celle du 2 et la flèche double représente -3) :



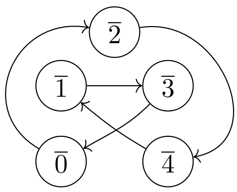
Un graphe de Cayley de $\mathbb{Z}$ avec 2 et -3 comme générateurs.

Deux graphes de Cayley différents peuvent donc représenter le même groupe. Les $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ étant cycliques pour $n \in \mathbb{N}^*$, leur graphe de Cayley peut se représenter comme suit :



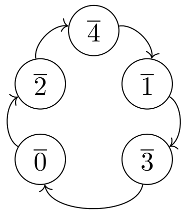
Un graphe de Cayley de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $\overline{1}$ comme générateur.

On peut aussi représenter les $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec d'autres générateurs. Par exemple $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ avec le générateur $\overline{2}$:



Un graphe de Cayley de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ avec $\overline{2}$ comme générateur.

En changeant la disposition des sommets, on retrouve notre boucle :

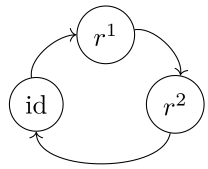


Un graphe de Cayley de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ avec $\overline{2}$ comme générateur.

Les boucles avec un seul type de flèche représentent toujours des groupes cycliques.

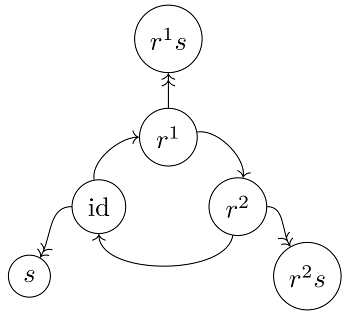
2.2 Les groupes diédraux

Commençons par le cas de D_3 qui possède 6 éléments. On prend les générateurs r et s où r est la rotation d'angle $2\pi/3$ et s est une symétrie. Commençons par représenter le sous-groupe engendré par r.



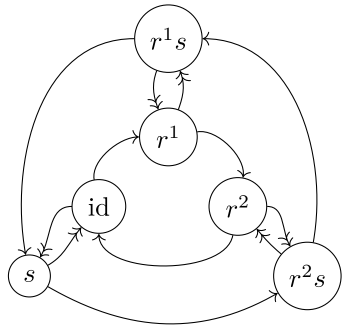
La flèche simple signifie une composition à droite par r.

Maintenant, il faut faire partir de ces trois éléments des flèches doubles qui représentent la composition à droite par s.



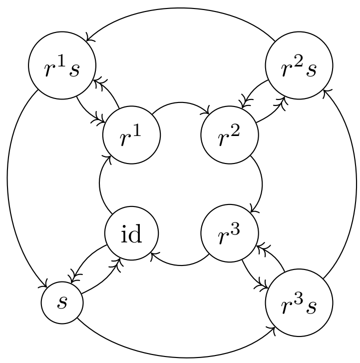
La double flèche signifie une composition à droite par s.

On peut maintenant compléter le graphe de Cayley de D_3 (en utilisant $sr = r^{-1}s$ et $s^2 = \mathrm{id}$) :



Graphe de Cayley de D_3.

La construction des graphes de Cayley des groupes diédraux dans le cas général est similaire au cas $n = 3$.
On donne le cas $n = 4$ juste pour voir.

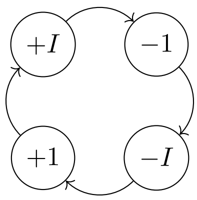


Graphe de Cayley de D_4.

Il est très facile de se souvenir des règles de calcul dans D_n en se souvenant du graphe de Cayley (en composant à droite, les flèches vont dans le sens opposé sur les deux cercles concentriques).

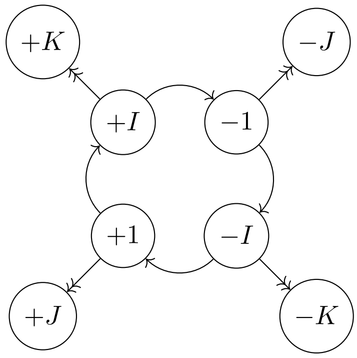
2.3 Le groupe des quaternions

Rappelons que $Q_8 = \{\pm 1, \pm I, \pm J, \pm K\}$, avec $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1$. Choisissons les générateurs I et J (on peut montrer que I et J engendrent Q_8).



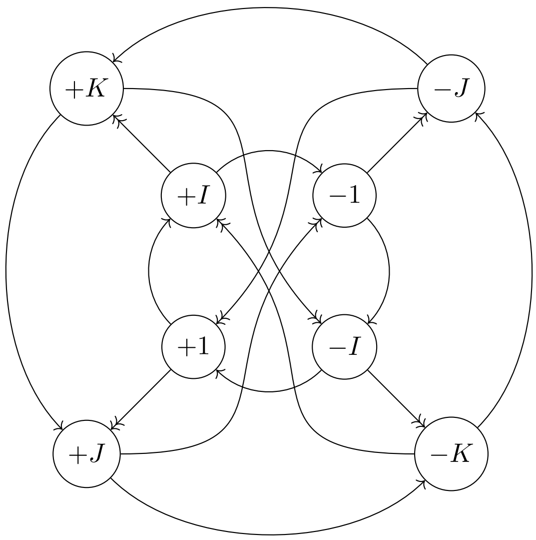
La simple flèche signifie une multiplication à droite par I.

Rajoutons les multiplications à droite par J pour obtenir tous les éléments de Q_8.



La double flèche signifie une multiplication à droite par J.

Complétons le graphe de Cayley avec les relations qui définissent Q_8 :

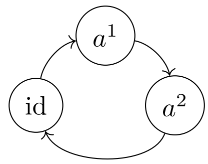


Graphe de Cayley de Q_8.

Remarquons les similarités avec le graphe de Cayley de D_4 tracé précédemment. La seule différence est la flèche double "retour" qui ne s'envoie pas au même endroit.
Le graphe permet de voir Q_8, et de calculer tous les produits dans Q_8. Par exemple, multiplier à droite par K correspond à suivre d'abord une flèche simple, puis une flèche double étant donné que $IJ = K$. On vérifie aussi que suivre deux flèches doubles correspond à la multiplication par $J^2 = -1$. Comme I et J sont d'ordre 4, suivre 4 fois une flèche simple ou suivre 4 fois une flèche double donne l'élément duquel on est partis au départ. Un graphe de Cayley de Q_8 représenté différemment est donné dans [**1**].

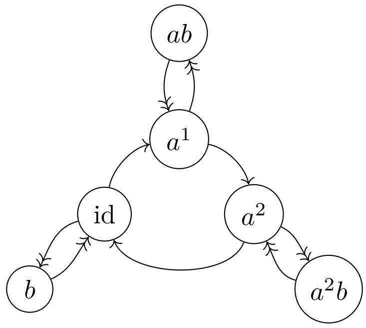
2.4 Un groupe alterné

On a déjà donné un graphe de Cayley pour les groupes $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ et $\mathfrak{S}_3 \cong D_3$. On va donner un graphe de Cayley de $\mathfrak{A}_4$. Pour cela, on cherche à trouver un nombre de générateurs de $\mathfrak{A}_4$ petit pour ne pas avoir trop de flèches différentes. On choisit un trois cycle et une double transposition $a = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}$ (a et b engendrent bien $\mathfrak{A}_4$). Remarquons que a est d'ordre 3 et que b est d'ordre 2. On a donc $a^3 = b^2 = \mathrm{id}$.



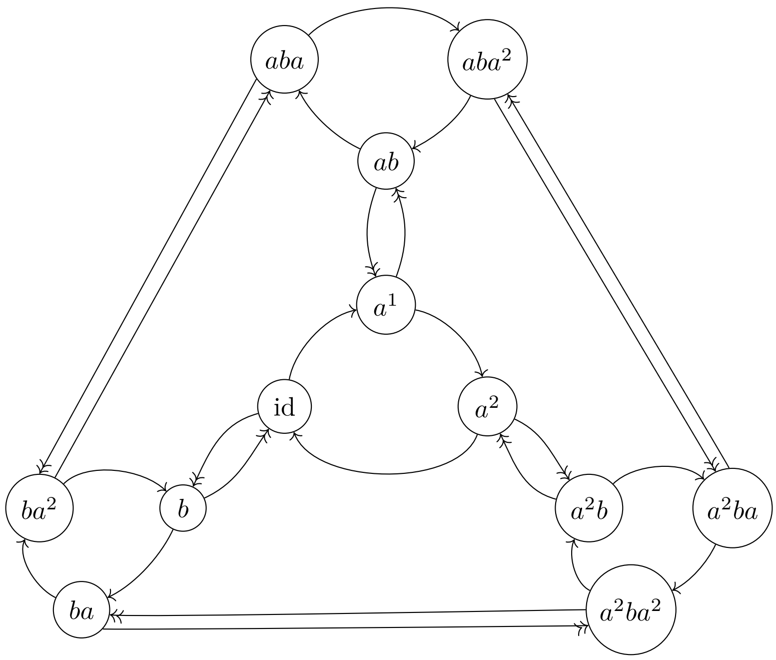
La simple flèche signifie une compositions à droite par a.

Ajoutons maintenant les compositions à droite par b. Puisque $b^2 = \mathrm{id}$, on ajoute au passage les flèches "retour".



La double flèche signifie une composition à droite par b.

On complète ensuite ce graphe de Cayley de $\mathfrak{A}_4$.

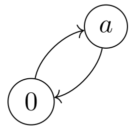


Graphe de Cayley de $\mathfrak{A}_4$.

Sur ce graphe de Cayley, on voit un tétraèdre tronqué (les sommets du tétraèdre sont les quatre boucles à trois éléments qui suivent les flèches simples). Tracer un graphe de Cayley de $\mathfrak{S}_4$ permet de voir un cube tronqué. Ce n'est pas un hasard : le groupe des déplacements du tétraèdre est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$ et le groupe des déplacements du cube est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$ (voir par exemple **[2]**).

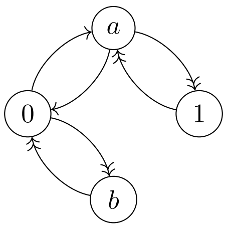
2.5 Un exemple de produit direct

On cherche à tracer le graphe de Cayley de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Choisissons les générateurs $a = (\overline{1}, \overline{0})$ et $b = (\overline{0}, \overline{1})$.



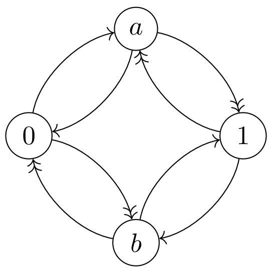
La flèche simple signifie une addition à droite par a.

On ajoute la possibilité d'additionner b à droite :



La flèche double signifie une addition à droite par b.

On complète le graphe de Cayley en ajoutant les deux dernières flèches simples.

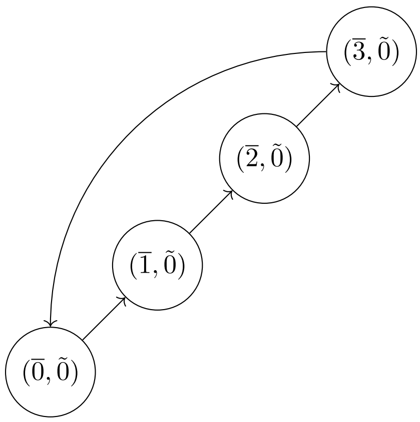


Graphe de Cayley de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

On a tracé un graphe de Cayley du groupe de Klein. Pour mieux voir, traçons un graphe de Cayley de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

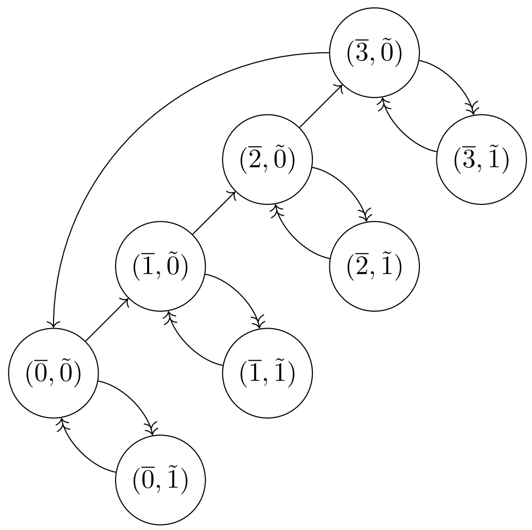
2.6 Un autre exemple de produit direct

Prenons $a = (\overline{1}, \tilde{0})$ et $b = (\overline{0}, \tilde{1})$ pour générateurs de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.



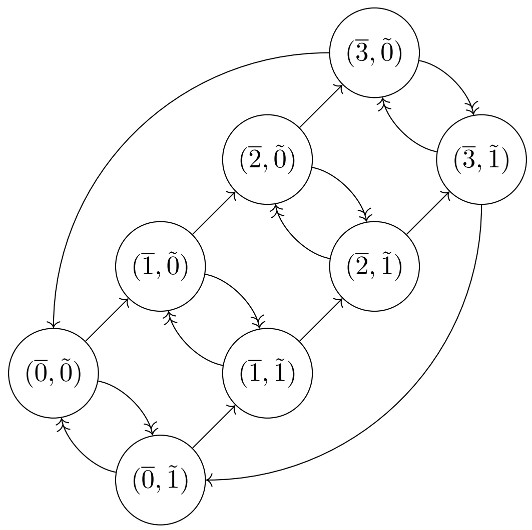
La flèche simple signifie une addition à droite par a.

On ajoute ensuite les flèches doubles :



La flèche double signifie une addition à droite par b.

Et on complète le graphe en ajoutant les flèches simples manquantes.



Graphe de Cayley de $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

On trouvera dans **[1]** d'autres exemples de graphes de Cayley.

Références :

— **[1]** Groupes finis et treillis de leurs sous-groupes, *Alain Debreil*

— **[2]** Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ et ses métamorphoses, *Alain Debreil, Rached Mneimné*