

Groupe

ÉTIENNE AFFALOU
ENS de Rennes - Année scolaire 2025-2026

PROPOSITION 1 Soit p un nombre premier. Soit G un p -groupe fini. Alors, le groupe G est simple si et seulement si G est cyclique d'ordre p .

- ☞ **Preuve :** Supposons que G est simple. Comme le centre $Z(G)$ est non trivial, $Z(G) = G$ par simplicité. Si l'ordre de G n'est pas p , alors G est d'ordre p^k avec $k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 2$ (le groupe trivial n'est pas simple). Mais un p -groupe fini vérifie la réciproque du théorème de Lagrange, donc G a un sous-groupe d'ordre p , qui est distingué car G est abélien. C'est impossible car G est simple. Ainsi, G est cyclique d'ordre p .
Inversement, un groupe d'ordre p est toujours isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui est un groupe simple.
- ☞ **Remarque :** Un groupe fini simple est **banal** lorsque ce groupe est fini d'ordre premier. Dans la suite, on cherche quels entiers inférieurs à 168 peuvent donner des groupes finis simples non banals. Cette proposition élimine donc tous les p -groupes finis de notre recherche. Nous avons donc éliminé les entiers 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17, 19, 23, 25, 27, 29, 31, 32, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59, 61, 64, 67, 71, 73, 79, 81, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 121, 125, 127, 128, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163 et 167.

PROPOSITION 2 Soient p et q deux nombres premiers distincts. Soit G un groupe fini d'ordre pq . Alors, le groupe G n'est pas simple.

- ☞ **Preuve :** On peut supposer sans perte de généralité que $p < q$. Les théorèmes de Sylow affirment que $n_q \equiv 1[q]$ et que $n_q \mid p$. Ainsi, $n_q \in \{1, p\}$. Mais si $n_q = p$, alors $p = 1 + kq$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, d'où $1 + kq < q$ ce qui est absurde. Ainsi, $n_q = 1$ et le groupe G n'est pas simple.
- ☞ **Remarque :** On peut en fait classifier les groupes d'ordre pq à isomorphisme près, mais ce n'est pas l'objectif de ce document. Nous avons éliminé les entiers 6, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 33, 34, 35, 38, 39, 46, 51, 55, 57, 58, 62, 65, 69, 74, 77, 82, 85, 86, 87, 91, 93, 94, 95, 106, 111, 115, 118, 119, 122, 123, 129, 133, 134, 141, 142, 143, 145, 146, 155, 158, 159, 161 et 166.

PROPOSITION 3 Soient p et q deux nombres premiers distincts. Soit G un groupe fini d'ordre p^2q . Alors, le groupe G n'est pas simple.

- ☞ **Preuve :** Deux cas se présentent naturellement.
- Si $p > q$, on a $n_p \equiv 1[p]$ et $n_p \mid q$ et on en déduit comme pour la proposition 2 que $n_p = 1$ et G n'est pas simple.
 - Supposons que $p < q$. On a $n_q \equiv 1[q]$ et $n_q \mid p^2$, donc $n_q \in \{1, p, p^2\}$. Comme précédemment, si $n_q = p$, on a $p = 1 + kq$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et donc $1 + kq < q$ ce qui est absurde. Donc $n_q \in \{1, p^2\}$. Si $n_q = 1$, G n'est pas simple. Sinon, $n_q = p^2$, et les q -Sylow sont cycliques d'ordre q , donc l'intersection de deux q -Sylow distincts est réduite à l'élément neutre. On a donc dans G au moins $p^2(q-1)$ éléments d'ordre q . Il reste donc au plus $p^2q - p^2(q-1) = p^2$ éléments dont l'ordre divise p^2 . Mais G a au moins un p -Sylow, donc $n_p = 1$ et G n'est pas simple.
- ☞ **Remarque :** On peut là aussi classifier les groupes d'ordre p^2q à isomorphisme près, mais c'est nettement plus laborieux que pour les groupes d'ordre pq . Nous avons éliminé les entiers 12, 18, 20, 28, 44, 45, 50, 52, 63, 68, 75, 76, 92, 98, 99, 116, 117, 124, 147, 148, 153 et 164.

PROPOSITION 4 Soient p et q deux nombres premiers distincts. Soit G un groupe fini d'ordre p^2q^2 . Alors, le groupe G n'est pas simple.

- ☞ **Preuve :** On peut supposer sans perte de généralité que $p < q$. On a alors $n_q \equiv 1[q]$ et $n_q \mid p^2$ donc $n_q \in \{1, p, p^2\}$. Comme dans la proposition 3, le cas $n_q = p$ donne lieu à une absurdité. Si $n_q = 1$, G n'est pas simple. Sinon, $n_q = p^2$ et $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tel que $p^2 = 1 + kq$, donc $q \mid (p-1)(p+1)$ et par le lemme d'Euclide, $q \mid p-1$ ou $q \mid p+1$. Mais $p < q$ donc on a nécessairement $q \mid p+1$. En particulier, $q \leq p+1$, avec $p+1 \leq q$ car $p < q$. On en déduit que $p+1 = q$, et donc que $(p, q) = (2, 3)$. Pour conclure, il suffit donc de montrer que si G est d'ordre $2^2 \times 3^2 = 36$

avec $n_3 = 2^2$, alors il n'est pas simple. Supposons que G est simple. On sait que G agit transitivement sur ses 3-Sylow, ce qui fournit un morphisme non trivial $\varphi : G \rightarrow \mathfrak{S}_{n_3}$ avec $n_3 = 2^2 = 4$. De plus, G est simple donc φ est injectif, d'où $|G| \mid (n_3)!$ soit $36 \mid 24$ ce qui est absurde. Ainsi, G n'est pas simple.

☞ **Remarque :** Nous avons seulement éliminé les entiers 36 et 100.

PROPOSITION 5 Soient p, q et r trois nombres premiers distincts. Soit G un groupe fini d'ordre pqr . Alors, le groupe G n'est pas simple.

☞ **Preuve :** On peut supposer sans perte de généralité que $p < q < r$. Comme dans la proposition 3, pour des raisons de place dans G , on a nécessairement $(p-1)n_p + (q-1)n_q + (r-1)n_r \leq pqr$. Notons \star cette inégalité. Nous allons montrer que $1 \in \{n_p, n_q, n_r\}$. Cela prouvera que G n'est pas simple. Pour cela, on suppose que $1 \notin \{n_p, n_q, n_r\}$. Nous allons voir que cela impose des conditions aux entiers n_p, n_q et n_r .

- On a $n_p \geq q$. En effet, $n_p \mid qr$ et $n_p \neq 1$ donc $n_p \in \{q, r, qr\}$, puis $n_p \geq q$ car $r > q$.
- On a $n_q \geq r$. Effectivement, $n_q \mid pr$ et $n_q \neq 1$ donc $n_q \in \{p, r, pr\}$. Mais si $n_q = p$, comme $n_q = 1 + kq$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient $1 + kq < q$ ce qui est impossible. Donc $n_q \in \{r, pr\}$ et $n_q \geq r$.
- Enfin, $n_r = pq$. Comme $n_r \mid pq$, $n_r \in \{p, q, pq\}$ avec $n_r = 1 + kr > r$ ($k \in \mathbb{N}^*$). D'où $n_r \notin \{p, q\}$ car $p < q < r$. En injectant ces conditions sur n_p, n_q et n_r dans l'inégalité \star , on obtient $(p-1)q + (q-1)r + (r-1)pq \leq pqr$ soit $pq - q + qr - r + pqr - pq \leq pqr$, donc $qr \leq q + r$. C'est absurde car $q \geq 3$ et $r \geq 5$. Finalement, on a bien $1 \in \{n_p, n_q, n_r\}$ et le groupe G n'est pas simple.

☞ **Remarque :** Cette proposition élimine les entiers 30, 42, 66, 70, 78, 102, 105, 110, 114, 130, 138, 154 et 165.

PROPOSITION 6 Soient p, q deux nombres premiers tels que $p < q$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Soit G un groupe fini d'ordre pq^α . Alors, le groupe G n'est pas simple.

☞ **Preuve :** On a $n_q \equiv 1[q]$ et $n_q \mid p$ donc si $n_q = p$, on a $p = 1 + kq$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ d'où $1 + kq < q$ ce qui est absurde. Ainsi, $n_q = 1$ et G n'est pas simple.

☞ **Remarque :** Cela élimine seulement 54 et 162. À ce stade, il nous reste à vérifier si un groupe fini dont l'ordre est dans l'ensemble X peut être un groupe simple ou pas, où

$$X = \{24, 40, 48, 56, 60, 72, 80, 84, 88, 90, 96, 104, 108, 112, 120, 126, 132, 135, 136, 140, 144, 150, 152, 156, 160, 168\}.$$

PROPOSITION 7 Soit G un groupe fini tel que $|G| \in \{40, 84, 88, 104, 126, 135, 136, 140, 152, 156\}$. Alors, le groupe G n'est pas simple.

☞ **Preuve :** Ces ordres se traitent en utilisant directement les théorèmes de Sylow.

- $|G| = 40 = 2^3 \times 5$. Comme $n_5 \mid 8$ et $n_5 \equiv 1[5]$, on a $n_5 \in \{1, 2, 4, 8\} \cap \{1, 6\}$ d'où $n_5 = 1$.
- $|G| = 84 = 2^2 \times 3 \times 7$. Comme $n_7 \mid 12$ et $n_7 \equiv 1[7]$, on a $n_7 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \cap \{1, 8\}$ d'où $n_7 = 1$.
- $|G| = 88 = 2^3 \times 11$. Comme $n_{11} \mid 8$ et $n_{11} \equiv 1[11]$, on a $n_{11} \in \{1, 2, 4, 8\} \cap \{1\}$ d'où $n_{11} = 1$.
- $|G| = 104 = 2^3 \times 13$. Comme $n_{13} \mid 8$ et $n_{13} \equiv 1[13]$, on a $n_{13} \in \{1, 2, 4, 8\} \cap \{1\}$ d'où $n_{13} = 1$.
- $|G| = 126 = 2 \times 3^2 \times 7$. Comme $n_7 \mid 18$ et $n_7 \equiv 1[7]$, on a $n_7 \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \cap \{1, 8, 15\}$ d'où $n_7 = 1$.
- $|G| = 135 = 3^3 \times 5$. Comme $n_3 \mid 5$ et $n_3 \equiv 1[3]$, on a $n_3 \in \{1, 5\} \cap \{1, 4\}$ d'où $n_3 = 1$.
- $|G| = 136 = 2^3 \times 17$. Comme $n_{17} \mid 8$ et $n_{17} \equiv 1[17]$, on a $n_{17} \in \{1, 2, 4, 8\} \cap \{1\}$ d'où $n_{17} = 1$.
- $|G| = 140 = 2^2 \times 5 \times 7$. Comme $n_7 \mid 20$ et $n_7 \equiv 1[7]$, on a $n_7 \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20\} \cap \{1, 8, 15\}$ d'où $n_7 = 1$.
- $|G| = 152 = 2^3 \times 19$. Comme $n_{19} \mid 8$ et $n_{19} \equiv 1[19]$, on a $n_{19} \in \{1, 2, 4, 8\} \cap \{1\}$ d'où $n_{19} = 1$.
- $|G| = 156 = 2^2 \times 3 \times 13$. Comme $n_{13} \mid 12$ et $n_{13} \equiv 1[13]$, on a $n_{13} \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \cap \{1\}$ d'où $n_{13} = 1$.

☞ **Remarque :** Il nous reste encore 24, 48, 56, 60, 72, 80, 90, 96, 108, 112, 120, 132, 144, 150, 160 et 168.

PROPOSITION 8 Soit G un groupe fini simple non abélien. Soit H un sous-groupe propre de G . Alors, G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{A}_{[G:H]}$. En particulier, $|G| \mid [G:H]!/2$.

☞ **Preuve :** On considère l'action de G sur G/H par translation à gauche. Cela fournit un morphisme $\varphi : G \rightarrow \mathfrak{S}_{[G:H]}$ qui n'est pas trivial car H n'est pas égal à G , et qui est donc injectif par simplicité de G . On a donc $\varphi : G \hookrightarrow \mathfrak{S}_{[G:H]}$. Notant ε la signature de $\mathfrak{S}_{[G:H]}$, le morphisme $\varepsilon \circ \varphi$ est trivial. Dans le cas contraire, on aurait un sous-groupe d'indice 2 dans G et G ne serait pas simple. Ainsi, l'image de φ est dans $\mathfrak{A}_{[G:H]}$.

☞ **Conséquence :** On en déduit que si G est un groupe fini simple non abélien et p diviseur premier de $|G|$, alors $|G| \mid (n_p)!/2$. En effet, dans ce cas, le normalisateur d'un p -Sylow est un sous-groupe propre de G . Nous allons utiliser la réciproque de ce fait pour éliminer d'autres entiers.

PROPOSITION 9 Soit G un groupe fini tel que $|G| \in \{24, 48, 72, 80, 96, 108, 112, 150, 160\}$. Alors, le groupe G n'est pas simple.

- ☞ **Preuve :** Un groupe abélien fini est simple si et seulement si G est cyclique d'ordre premier. Donc d'après la proposition 8, il suffit de trouver un nombre premier p diviseur de $|G|$ tel que $|G| \nmid (n_p)!/2$.
- $|G| = 24, 48$ ou 96 . On a $|G| = 2^k \times 3$ où $k \in \{3, 4, 5\}$. On a donc $n_2 \mid 3$ donc $n_2 \in \{1, 3\}$. Si $n_2 = 1$, G n'est pas simple. Sinon, $n_2 = 3$ et $2^k \times 3 \nmid 3$, donc G n'est pas simple.
 - $|G| = 72 = 2^3 \times 3^2$. On a $n_3 \mid 8$ et $n_3 \equiv 1[3]$, donc si $n_3 = 1$, G n'est pas simple. Sinon, $n_3 \in \{2, 4, 8\} \cap \{1, 4, 7\}$. Mais 72 ne divise pas $4!/2 = 12$, donc G n'est pas simple.
 - $|G| = 80 = 2^4 \times 5$. On a $n_2 \mid 5$ donc si $n_2 = 1$, G n'est pas simple. Sinon, $n_2 = 5$ et 80 ne divise pas $5!/2 = 60$ donc G n'est pas simple.
 - $|G| = 108 = 2^2 \times 3^3$. On a $n_3 \mid 4$ et $n_3 \equiv 1[3]$ donc $n_3 \in \{1, 2, 4\} \cap \{1, 4\}$. Si $n_3 = 1$, G n'est pas simple. Sinon, $n_3 = 4$, et 108 ne divise pas $4!/2 = 12$ donc G n'est pas simple.
 - $|G| = 112 = 2^4 \times 7$. On a $n_2 \mid 7$ donc $n_2 \in \{1, 7\}$. Si $n_2 = 1$, G n'est pas simple. Sinon, 112 ne divise pas $7!/2 = 2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$, donc G n'est pas simple.
 - $|G| = 150 = 2 \times 3 \times 5^2$. On a $n_5 \mid 6$ et $n_5 \equiv 1[5]$ donc $n_5 \in \{1, 2, 3, 6\} \cap \{1, 6\}$ donc si $n_5 = 1$, G n'est pas simple. Sinon, 150 ne divise pas $6!/2 = 360$ donc G n'est pas simple.
 - $|G| = 160 = 2^5 \times 5$. On a $n_2 \mid 5$ donc $n_2 \in \{1, 5\}$. Si $n_2 = 1$, alors G n'est pas simple. Sinon, $n_2 = 5$ et 160 ne divise pas $5!/2 = 60$ donc G n'est pas simple.
- ☞ **Remarque :** Il nous reste $56, 60, 90, 120, 132, 144$ et 168 .

PROPOSITION 10 Soit G un groupe fini tel que $|G| \in \{56, 132\}$. Alors, le groupe G n'est pas simple.

- ☞ **Preuve :** On traite les deux cas séparément mais en utilisant les mêmes idées.
- $|G| = 56 = 2^3 \times 7$. On a $n_7 \mid 8$ et $n_7 \equiv 1[7]$ donc $n_7 \in \{1, 8\}$. Si $n_7 = 1$, alors G n'est pas simple. Sinon, $n_7 = 8$ donc on a $8(7-1) = 48$ éléments d'ordre 7 dans G . Il ne reste plus que $56 - 48 = 8$ éléments au plus dont l'ordre divise 8 , d'où $n_2 = 1$ et G n'est pas simple.
 - $|G| = 132 = 2^2 \times 3 \times 11$. On a $n_{11} \mid 12$ et $n_{11} \equiv 1[11]$, donc $n_{11} \in \{1, 12\}$. Si $n_{11} = 1$, G n'est pas simple. Sinon, $n_{11} = 12$ et on a $12(11-1) = 120$ éléments d'ordre 11 . On a aussi $n_3 \equiv 1[3]$ et $n_3 \mid 44$ donc $n_3 \in \{1, 2, 4, 11, 22, 44\} \cap \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43\}$ d'où $n_3 \in \{1, 4, 22\}$. Mais si $n_3 = 22$, alors on a $22(3-1) = 44$ éléments d'ordre 3 ce qui est impossible car on a déjà 120 éléments d'ordre 11 . Bien sûr, si $n_3 = 1$, G n'est pas simple. Sinon, on a donc $n_3 = 4$ d'où $4(3-1) = 8$ éléments d'ordre 3 . Il ne reste plus que $132 - 120 - 8 = 4$ éléments dont l'ordre n'est ni 3 ni 11 , d'où $n_2 = 1$ et G n'est pas simple.
- ☞ **Remarque :** Il ne reste plus que $60, 90, 120, 144$ et 168 .

PROPOSITION 11 Soit p un nombre premier impair. Les p -Sylow de \mathfrak{A}_{p+1} sont d'ordre p et leurs normalisateurs sont d'ordre $p(p-1)/2$.

- ☞ **Preuve :** Les p -Sylow de \mathfrak{A}_{p+1} sont d'ordre p car p est la plus grande puissance de p qui divise $(p+1)!/2$ (et on a pris p impair). Les éléments d'ordre p de \mathfrak{A}_{p+1} sont les p -cycles, et on en a donc $(p-1)n_p$. Mais pour construire un p -cycle dans \mathfrak{A}_{p+1} , on a $p+1$ choix pour le premier élément du cycle, p choix pour le deuxième et ainsi de suite. On a donc au total $(p+1)!$ choix, à diviser par p car on a p représentations identiques pour un p cycle donné. Ainsi, $n_p = (p+1)!/p(p-1)$, et un normalisateur d'un p -Sylow est donc d'ordre $|\mathfrak{A}_{p+1}|/n_p = p(p-1)/2$.
- ☞ **Remarque :** Nous allons appliquer ce résultat aux groupe finis simples non abéliens dont le nombre de p -Sylow vaut exactement $p+1$.

PROPOSITION 12 Soit G un groupe fini simple non abélien et p un diviseur premier de $|G|$. Supposons $n_p = p+1$. Alors $|G|$ divise $(p-1)p(p+1)/2$.

- ☞ **Preuve :** Par la proposition 8, G s'injecte dans \mathfrak{A}_{p+1} (en particulier, p est impair, sinon \mathfrak{A}_3 est abélien et G aussi). Un p -Sylow P de G est donc aussi un p -Sylow de \mathfrak{A}_{p+1} par la première partie de la proposition 11. L'ordre du normalisateur dans \mathfrak{A}_{p+1} est $p(p-1)/2$ par la proposition 11, donc l'ordre du normalisateur dans G de P divise aussi $p(p-1)/2$. Ainsi, $|G|$ divise $(p(p-1)/2) \times n_p = (p-1)p(p+1)/2$.

- ☞ **Remarque :** Nous appliquons ce résultat pour montrer qu'un groupe G tel que $|G| \in \{90, 120\}$ n'est pas simple.
- $|G| = 90 = 2 \times 3^2 \times 5$. On a $n_5 \mid 18$ et $n_5 \equiv 1[5]$ donc $n_5 \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \cap \{1, 6, 11, 16\}$ donc $n_5 \in \{1, 6\}$. Si $n_5 = 1$, G n'est pas simple. Sinon, $n_5 = 6$ et si G était simple, on aurait que 90 divise $4 \times 5 \times 6/2 = 60$ ce qui n'est pas le cas (en effet, G ne peut pas être abélien). Ainsi, G n'est pas simple.
 - $|G| = 120 = 2^3 \times 3 \times 5$. On a $n_5 \mid 24$ et $n_5 \equiv 1[5]$ donc $n_5 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \cap \{1, 6, 11, 16, 21\}$ donc $n_5 \in \{1, 6\}$. Si $n_5 = 1$, G n'est pas simple. Sinon, $n_5 = 6$ et si G était simple, on aurait $120 \mid 60$ ce qui est faux. Donc G n'est pas simple.

Au final, il ne nous manque plus que 60, 144 et 168. L'ordre 144 mérite d'être traité à part.

PROPOSITION 13 Un groupe fini d'ordre 144 n'est pas simple.

- ☞ **Preuve :** Soit G un groupe fini d'ordre 144. Supposons que G est simple.
- Nous commençons comme d'habitude, $144 = 2^4 \times 3^2$ donc $n_3 \mid 16$ et $n_3 \equiv 1[3]$ donc $n_3 \in \{1, 2, 4, 8, 16\} \cap \{1, 4, 7, 10, 13, 16\}$ et $n_3 \in \{1, 4, 16\}$. Comme G est simple, $n_3 \neq 1$ et par la proposition 8, comme 144 ne divise pas $(4!)/2$, $n_3 \neq 4$. Ainsi, G possède 16 3-Sylow. On dispose de deux 3-Sylow distincts dont l'intersection est non triviale. En effet, sinon on aurait $16 \times (9 - 1) = 128$ éléments dans G dont l'ordre divise 9 et comme $144 - 128 = 16$, on a nécessairement $n_2 = 1$ ce qui est contradictoire. Soient S_1, S_2 deux 3-Sylow dont l'intersection est non triviale. On a alors $|S_1 \cap S_2| = 3$ et on dispose de $x \in S_1 \cap S_2$ tel que $S_1 \cap S_2 = \langle x \rangle$ (un groupe d'ordre 3 est cyclique). Notons $C = \{g \in G, gx = xg\}$ le centralisateur de x . Les groupes S_1 et S_2 sont d'ordre $9 = 3^2$ donc sont abéliens. Ainsi, $|C| \geq 3 + 2 \times (9 - 3) = 15$ (il ne faut pas compter $\langle x \rangle$ deux fois). De plus, S_1 est un sous-groupe de C donc par le théorème de Lagrange, $|C|$ est multiple de 9. En ajoutant la contrainte que $|C| \mid 144$ toujours par le théorème de Lagrange, on obtient que $|C| \in \{18, 36, 72, 144\}$. Si $|C| = 144$, alors x est central non trivial et par simplicité, G est nécessairement abélien ce qui contredit l'hypothèse de simplicité. Ainsi, $|C| \in \{18, 36, 72\}$. Mais G agit transitivement par translation à gauche sur G/C donc on dispose d'un morphisme non trivial $G \rightarrow \mathfrak{S}_{|G|/|C|}$ qui est injectif par simplicité de G . Donc 144 divise $(144/|C|)!$ avec $(144/36)! = 24$ et $(144/72)! = 2$. On en déduit que $|C| = 18$. Mais S_1 et S_2 sont deux 3-Sylow distincts de C qui sont d'indice 2 dans C donc distingués dans C . C'est absurde (un 3-Sylow est distingué dans C si et seulement si il est le seul 3-Sylow de C). Finalement, G n'est pas simple.

- ☞ **Remarque :** Que dire des ordres 60 et 168 ?

Le groupe \mathfrak{A}_5 est bien connu pour être simple d'ordre 60, et $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ est un groupe simple (groupe projectif spécial linéaire qui n'est ni $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_2)$, ni $\text{PSL}_2(\mathbb{F}_3)$) d'ordre $(7^2 - 1)(7^2 - 7)/(6 \times 2) = 168$. Cela prouve la proposition suivante.

PROPOSITION 14 Soit G un groupe fini simple non banal d'ordre inférieur ou égal à 168. Alors, $|G| \in \{60, 168\}$. De plus, les ordres 60 et 168 correspondent effectivement à des groupes simples non banals.

En utilisant des techniques plus avancées, on peut démontrer qu'un groupe fini simple non banal d'ordre inférieur ou égal à 660 est d'ordre 60, 168, 360, 504 ou 660. On pourra à ce titre consulter l'article de Christophe BERTAULT référencé ci-dessous.

Références :

- ☞ Daniel PERRIN. *Cours d'algèbre*. Ellipses, 1996.
- ☞ Christophe BERTAULT. *Les groupes finis simples d'ordre inférieur à 660*. <http://christophebertault.fr/documents/articles/Article%20-%20Les%20groupes%20finis%20simples%20d'ordre%20inferieur%20a%20660.pdf>
- ☞ Pierre MOUNOUD et Denis BENOIS. *Exercice 1 du devoir surveillé de théorie des groupes donné à l'université de Bordeaux le 12/11/2020*. <https://www.math.u-bordeaux.fr/~dbenoua/Documents/groupes-DS2020.pdf>