Exercice 5 : Domaine de convergence et somme des séries entières de variable réelle.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n\theta)x^n$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

   Rayon de convergence :
   Supposons que $\theta = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
   Alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n\theta)x^n = 0$ et $R = +\infty$.
   Supposons maintenant que $\theta \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
   Comme la suite $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée on a $R \geq 1$. En effet, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |\sin(n\theta)|x^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ et le rayon de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ est 1.
   De plus, comme la suite $(\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 (elle ne converge même pas !), la série $\sum \sin(n\theta)$ diverge grossièrement. Donc $R \leq 1$.
   Conclusion : $R = 1$.

   Calcul de la somme :

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta)x^n = Im\left(\sum_{n=0}^{\infty}(e^{i\theta}x)^n\right) = Im\left(\frac{1}{1-e^{i\theta}x}\right) \quad = Im\left(\frac{1-e^{-i\theta}x}{1-2x\cos(\theta)+x^2}\right) = \frac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}.$$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n$.

   Pour tout $x \in]-1;1]$, on sait que

   $$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n.$$

   On en déduit donc que $-\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ et que le rayon de convergence est 1.

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}x^n$.

   On a vu que $-\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ pour tout $x \in]-1,1[$. On intègre cette relation :

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = (1-x)\ln(1-x) + x \quad \text{pour tout } x \in]-1,1[.$$

   Le rayon de convergence est donc 1.

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$.

   Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$. On dérive cette relation :

   $$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{donc} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

   $$\text{Alors} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{1}{(1-x)^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{et } R = 1.$$