Florian Lemonnier florianlemonnier@live.fr

Décomposition en éléments simples et Calcul intégral

1 Décomposition en éléments simples

1.1 Fractions rationnelles

On note $\mathbb{K}(X) = \left\{ \frac{A}{B} \middle| A \in \mathbb{K}[X] \text{ et } B \in \mathbb{K}[X]^* \right\}$ l'ensemble des fractions rationnelles.
$(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps commutatif.

$F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ est irréductible $\Leftrightarrow A \wedge B = 1$.

On définit alors $\deg F = \begin{cases} \deg A - \deg B & \text{si } F \neq 0 \\ -\infty & \text{si } F = 0 \end{cases}$.

Exercice 1 Vrai ou Faux
Soient F et G deux fractions rationnelles non-nulles. Dire des assertions suivantes si elles sont vraies ou fausses.

- $\deg(F+G) = \max\{\deg F, \deg G\}$
- $\deg(FG) = \deg F + \deg G$
- Pour F différent d'un polynôme constant, on a : $\deg F' = \deg F - 1$

Désormais, on considère que $F = \frac{A}{B}$ est irréductible.
Les racines de F sont les racines de A, et les pôles de F sont les racines de B.

1.2 Décomposition des fractions à dénominateur scindé

1.2.1 Éléments simples

On s'occupe donc ici de $\mathbb{C}(X)$ et des fractions réelles à dénominateur scindé.

On écrit : $B = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)^{r_i}$, avec les a_i deux à deux distincts.

Il existe une unique décomposition :

$$F = \underbrace{Q}_{\in \mathbb{K}[X]} + \underbrace{\frac{\alpha_{1,1}}{X - a_1} + \ldots + \frac{\alpha_{1,r_1}}{(X-a_1)^{r_1}}}_{\text{Partie polaire de } F \text{ en } a_1} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\alpha_{n,1}}{X - a_n} + \ldots + \frac{\alpha_{n,r_n}}{(X-a_n)^{r_n}}, \text{ avec } \alpha_{i,j} \in \mathbb{K}.$$

On appelle $\alpha_{i,1}$ le résidu de F en a_i.

1.2.2 Méthodes

On considère dans ce premier exemple la décomposition en éléments simples de $F = \frac{X^4 - X^2 + 1}{X^3 - X^2}$ dans $\mathbb{R}(X)$.

1. **Partie entière**

   $\deg F \geq 0$. On effectue la division euclidienne (au brouillon) :
   $$\begin{array}{rrrr|l} X^4 & & -X^2 & +1 & X^3 - X^2 \\ \cline{5-5} -X^4 & +X^3 & & & \\ \cline{1-2} & X^3 & -X^2 & +1 & X+1 \\ & -X^3 & +X^2 & & \\ \cline{2-3} & & & 1 & \end{array}$$

   On en déduit donc que : $F = X + 1 + \frac{1}{X^3 - X^2}$, et on note $G = \frac{1}{X^3 - X^2}$.

2. **Détermination des pôles**
   $\deg G < 0$ et B scindé sur $\mathbb{R}$, 0 est pôle double et 1 pôle simple.
   On en déduit que $G = \dfrac{1}{X^2(X-1)} = \underbrace{\dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X^2}}_{=H} + \dfrac{\alpha}{X-1}$, avec $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$.

3. **Obtention des coefficients qui finissent les parties polaires**

   - $\times(X-1)$ et $x = 1$: $\alpha + (X-1)H = \dfrac{1}{X^2}$ donc comme 1 n'est pas pôle de H, $\alpha + 0 \times H(1) = \dfrac{1}{1^2}$, et $\alpha = 1$.
   - $\times X^2$ et $x = 0$: $aX + b + \dfrac{\alpha X^2}{X-1} = \dfrac{1}{X-1}$ donc $a \times 0 + b + 0 = \dfrac{1}{-1}$, et $b = -1$.

4. **Formule du résidu en un pôle simple**, autres méthode pour obtenir α
   Formule du résidu α en un pôle simple x_0 de $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$: $\alpha = \dfrac{A(x_0)}{B'(x_0)}$.

5. **Valeur particulière** (méthode peu recommandée, mais parfois indispensable pour finir)
   En substituant -1 : $\dfrac{1}{1 \times (-2)} = \dfrac{a}{-1} - \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{-2}$ donc $a = -1$.

6. **Limite** : $\lim\limits_{x \to +\infty} xG(x)$, autre méthode pour obtenir a

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} xG(x) &= \lim_{x \to +\infty} \left(a + \frac{b}{x} + \frac{\alpha x}{x-1} \right) = a + \alpha \\ &= 0 \text{ car } G(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^3} \end{aligned}$$

   Donc $a = -\alpha = -1$.

Donc $F = X + 1 - \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X^2} + \dfrac{1}{X-1}$.

On considère ici la décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{(X^2-1)^2}$ dans $\mathbb{R}(X)$.

$F = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{(X-1)^2} + \dfrac{\alpha}{X+1} + \dfrac{\beta}{(X+1)^2}$, avec $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

7. **Parité**
   On remarque que $F(X) = F(-X)$.
   $F(-X) = \dfrac{a}{-X-1} + \dfrac{b}{(-X-1)^2} + \dfrac{\alpha}{-X+1} + \dfrac{\beta}{(-X+1)^2} = \dfrac{-a}{X+1} + \dfrac{b}{(X+1)^2} + \dfrac{-\alpha}{X-1} + \dfrac{\beta}{(X-1)^2}$.
   Par unicité de la décomposition en éléments simples : $\alpha = -a$ et $\beta = b$.

On considère ici la décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{X}{(X^2+1)^3} \in \mathbb{R}(X)$ dans $\mathbb{C}(X)$.

$F = \dfrac{a}{X-i} + \dfrac{b}{(X-i)^2} + \dfrac{c}{(X-i)^3} + \dfrac{\alpha}{X+i} + \dfrac{\beta}{(X+i)^2} + \dfrac{\gamma}{(X+i)^3}$, avec $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.

8. **Développement complexe d'une fraction réelle**
   On remarque que $F(X) = \overline{F}(X)$.
   $\overline{F}(X) = \dfrac{\overline{\alpha}}{X-i} + \dfrac{\overline{\beta}}{(X-i)^2} + \dfrac{\overline{\gamma}}{(X-i)^3} + \dfrac{\overline{a}}{X+i} + \dfrac{\overline{b}}{(X+i)^2} + \dfrac{\overline{c}}{(X+i)^3}$.
   Par unicité de la décomposition en éléments simples : $a = \overline{\alpha}$ et $b = \overline{\beta}$ et $c = \overline{\gamma}$.

9. **Approfondissement des racines multiples par dérivation**
   On note $H = (X-i)^3 F = c + (X-i)b + (X-i)^2 R = \dfrac{X}{(X+i)^3}$, avec i non-pôle de R.

$H' = b + (\mathrm{X}-\mathrm{i})^2 R' + 2(\mathrm{X}-\mathrm{i})R$ donc $H'(\mathrm{i}) = b$.
Aussi $H' = (\mathrm{X}+\mathrm{i})^{-3} - 3\mathrm{X}(\mathrm{X}+\mathrm{i})^{-4}$ donc $H'(\mathrm{i}) = \dfrac{-\mathrm{i}}{16} = b$.

Exercice 2 Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(\mathrm{X})$.

1. $\dfrac{\mathrm{X}^2+1}{(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}-3)}$
2. $\dfrac{\mathrm{X}^2+1}{((\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}-3))^2}$
3. $\dfrac{4\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+4}{(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+2)^2}$
4. $\dfrac{\mathrm{X}^5}{\mathrm{X}^3+\mathrm{i}}$
5. $\dfrac{1}{\mathrm{X}^4+\mathrm{X}^2+1}$
6. $\dfrac{4\mathrm{X}^3}{(\mathrm{X}^4-1)^2}$
7. $\dfrac{\mathrm{X}^7}{(\mathrm{X}^2-1)^3}$
8. $\dfrac{1}{\mathrm{X}^2(\mathrm{X}+1)^3(\mathrm{X}^2+1)}$
9. $\dfrac{\mathrm{X}^6}{(\mathrm{X}-\mathrm{i})^2(\mathrm{X}-1)^3}$
10. $\dfrac{\mathrm{X}^2}{(\mathrm{X}^4+\mathrm{X}^2+1)^2}$
11. $\dfrac{1}{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)^2}$
12. $\dfrac{\mathrm{X}^5}{(\mathrm{X}-1)^3(\mathrm{X}^3+2)}$
13. $\dfrac{\mathrm{X}^2+4}{(\mathrm{X}-3)^3}$
14. $\dfrac{\mathrm{X}^5}{(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)^2}$

Exercice 3 Même exercice ($n \in \mathbb{N}$).

1. $\dfrac{\mathrm{X}^n}{\mathrm{X}^4-1}$
2. $\dfrac{n!}{\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\ldots(\mathrm{X}-n)}$
3. $\dfrac{1}{\mathrm{X}^n-1}$
4. $\dfrac{1}{(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^n-1)}$
5. $\dfrac{1}{\mathrm{X}^n(1-\mathrm{X})}$ et $\dfrac{1}{\mathrm{X}^n(1-\mathrm{X})^2}$; on pourra utiliser $\dfrac{1}{1-\mathrm{X}} = 1+\mathrm{X}+\ldots+\mathrm{X}^n+\dfrac{\mathrm{X}^{n+1}}{1-\mathrm{X}}$.

1.3 Subtilités de la décomposition dans $\mathbb{R}(\mathrm{X})$

1.3.1 De nouveaux éléments simples

Comme tous les polynômes de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ ne sont pas scindés, on ajoute de nouveaux éléments simples : $\dfrac{a\mathrm{X}+b}{\mathrm{X}^2+u\mathrm{X}+v}$ avec $u^2-4v<0$.

1.3.2 De nouvelles méthodes

On considère ici la décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{\mathrm{X}^5+1}{(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)^3}$ dans $\mathbb{R}(\mathrm{X})$.

10. **Division euclidienne**
    On effectue les divisions euclidiennes (au brouillon) :

$$
\begin{array}{cccccc|l}
\mathrm{X}^5 & & & & & +1 & \mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1 \\ \cline{7-7}
-\mathrm{X}^5 & -\mathrm{X}^4 & -\mathrm{X}^3 & & & & \\ \cline{1-3}
 & -\mathrm{X}^4 & -\mathrm{X}^3 & & & +1 & \mathrm{X}^3-\mathrm{X}^2+1 \\
 & +\mathrm{X}^4 & +\mathrm{X}^3 & +\mathrm{X}^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & & \mathrm{X}^2 & & +1 & \\
 & & & -\mathrm{X}^2 & -\mathrm{X} & -1 & \\ \cline{4-6}
 & & & & -\mathrm{X} & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc|l}
\mathrm{X}^3 & -\mathrm{X}^2 & & +1 & \mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1 \\ \cline{5-5}
-\mathrm{X}^3 & -\mathrm{X}^2 & -\mathrm{X} & & \\ \cline{1-3}
 & -2\mathrm{X}^2 & -\mathrm{X} & +1 & \mathrm{X}-2 \\
 & +2\mathrm{X}^2 & +2\mathrm{X} & +2 & \\ \cline{2-4}
 & & \mathrm{X} & +3 &
\end{array}
$$

On en déduit alors : $F = \dfrac{\mathrm{X}-2}{\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1} + \dfrac{\mathrm{X}+3}{(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)^2} + \dfrac{-\mathrm{X}}{(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)^3}$.

On considère désormais la décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{1}{(\mathrm{X}^2+1)^2(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)}$ dans $\mathbb{R}(\mathrm{X})$.

$F = \dfrac{a}{\mathrm{X}-1} + \dfrac{u\mathrm{X}+v}{\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1} + \dfrac{p\mathrm{X}+q}{\mathrm{X}^2+1} + \dfrac{r\mathrm{X}+s}{(\mathrm{X}^2+1)^2}$, avec $a, u, v, p, q, r, s \in \mathbb{R}$.

11. **Ne pas hésiter à passer dans $\mathbb{C}$ quand c'est nécessaire**
   $\times\left(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1\right)$ et $x=\mathrm{j}$: $\left(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1\right)F=u\mathrm{X}+v+\left(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1\right)G$, avec j non-pôle de G.
   $u\mathrm{j}+v=\dfrac{1}{\left(\mathrm{j}^2+1\right)^2(\mathrm{j}-1)}=\dfrac{\mathrm{j}}{\mathrm{j}-1}=\dfrac{\mathrm{j}\left(\mathrm{j}^2-1\right)}{(\mathrm{j}-1)\left(\mathrm{j}^2-1\right)}=\dfrac{1-\mathrm{j}}{3}$
   Donc $u=-\dfrac{1}{3}$ et $v=\dfrac{1}{3}$, car $(1,\mathrm{j})$ est une famille libre dans $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-ev.

Exercice 4 Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(\mathrm{X})$.

1. $\dfrac{3}{\mathrm{X}^3+1}$
2. $\dfrac{1}{(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^2+1)^2}$
3. $\dfrac{\mathrm{X}^3}{(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}^2+1)}$
4. $\dfrac{\mathrm{X}^5}{(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)^3}$
5. $\dfrac{\mathrm{X}^2+1}{(\mathrm{X}^2+2)^2(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1)}$
6. $\dfrac{1}{\mathrm{X}^6+1}$

Exercice 5 Utilité de la décomposition.

1. Effectuer la décomposition dans $\mathbb{R}(\mathrm{X})$ de $\dfrac{1}{\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}+2)}$.
2. Calculer la dérivée n-ième de $x\mapsto\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
3. Calculer $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ en fonction de n.

2 Calcul Intégral

2.1 Primitives usuelles

Ces formules sont données à une constante près.

$$
\begin{array}{lll}
\int x^\alpha\,\mathrm{d}x & =\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{avec } \alpha\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}\\
\int \frac{\mathrm{d}x}{x} & =\ln|x| & \text{sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ ou } \mathbb{R}^{-*}\\
\int \ln x\,\mathrm{d}x & =x\ln x-x & \text{sur } \mathbb{R}^{+*}\\
\int \tan x\,\mathrm{d}x & =-\ln|\cos x| & \text{sur } \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[\text{ avec } k\in\mathbb{Z}\\
\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} & =\arctan x & \text{sur } \mathbb{R}\\
\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} & =\begin{cases}\operatorname{argth} x & \text{sur }]-1;+1[\\ \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| & \text{sur tout intervalle ne contenant ni } -1 \text{ ni } 1\end{cases} & \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} & =\arcsin x & \text{sur } \mathbb{R}\\
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} & =\operatorname{argsh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) & \text{sur } \mathbb{R}\\
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} & =\begin{cases}\operatorname{argch} x & \text{sur }]1;+\infty[\\ \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| & \text{sur }]-\infty;-1[\text{ ou }]1;+\infty[\end{cases} & \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} & =\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| & \text{sur }]k\pi;(k+1)\pi[\text{ avec } k\in\mathbb{Z}\\
\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} & =\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| & \text{sur } \left]k\pi-\frac{\pi}{2};k\pi+\frac{\pi}{2}\right[\text{ avec } k\in\mathbb{Z}\\
\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh} x} & =\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| & \text{sur } \mathbb{R}^{-*} \text{ ou } \mathbb{R}^{+*}\\
\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x} & =2\arctan \mathrm{e}^x & \text{sur } \mathbb{R}\\
\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} & =\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} & \text{sur } \mathbb{R} \text{ avec } a\neq 0\\
\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} & =\ln|x-a|+\mathrm{i}\arctan\frac{x-\alpha}{\beta} & \text{avec } a=\alpha+\mathrm{i}\beta\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}
\end{array}
$$

2.2 Méthodes générales

2.2.1 Intégration par parties

Soient $u,v:[a;b]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On a :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t=[u(t)v(t)]_a^b-\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 6 Calculer, $n \in \mathbb{N}$.

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} t^2 \sin t \,\mathrm{d}t$
2. $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$
3. $J_n = \displaystyle\int_0^1 t^2 (1-t)^n \,\mathrm{d}t$

Exercice 7 Intégrales de Wallis

On pose $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_1 et étudier le sens de variations de la suite (I_n).
   Établir la formule de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.
2. En déduire la formule : $\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.
   Établir une formule similaire pour I_{2p+1}.
3. Vérifier que la suite (I_n) est décroissante et que la suite (nI_nI_{n-1}) est constante.
4. En déduire que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

2.2.2 Changement de variable

Soit u de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha;\beta]$, et f continue sur $u([\alpha;\beta])$ avec $u(\alpha) = a$ et $u(\beta) = b$. On a :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(u(t))\,u'(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 8 Prouver que : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\cos^8 x + \sin^8 x}}\,\mathrm{d}x = 0$.

Exercice 9 Déterminer les primitives, et préciser leur intervalle de validité, de la fonction $x \mapsto \arcsin^2 x$.

2.3 Fractions rationnelles

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$, irréductible. On en cherche une primitive.
On la décompose en éléments simples.

- Pour la partie entière $Q \in \mathbb{R}[X]$, on utilise : $\displaystyle\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, pour $n \in \mathbb{N}$.
- Pour les pôles réels, on a : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n} = \begin{cases} \ln|x-a| + C & \text{si } n = 1 \\ \frac{1}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C & \text{sinon} \end{cases}$.
- Ce qui reste à intégrer est du type $\dfrac{pX+q}{(X^2+uX+v)^n}$.
  On met le dénominateur sous forme canonique et on obtient : $\dfrac{pX+q}{\left[\left(X+\frac{u}{2}\right)^2+h^2\right]^n}$.
  Puis on effectue le changement de variable $y = \dfrac{x+\frac{u}{2}}{h}$, et on se ramène à $\displaystyle\int \frac{\alpha y+\beta}{(y^2+1)^n}\,\mathrm{d}y$.
  Ensuite, on utilise : $\displaystyle\int \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} = \begin{cases} \ln(x^2+1) + C & \text{si } n = 1 \\ \frac{1}{1-n}\frac{1}{(x^2+1)^{n-1}} + C & \text{sinon} \end{cases}$.
  Enfin, on calcule $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$ par récurrence et intégrations par parties successives, en partant de $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \arctan x$.

Exercice 10 Déterminer les primitives en précisant les intervalles de validité.

1. $\frac{x^4}{x^3-1}$
2. $\frac{x^3}{(x^2+2x+2)^2}$
3. $\frac{1}{(x^2+x+1)^2}$
4. $\frac{x^2+x}{x^6+1}$
5. $\frac{13}{(x-1)(x^2+4x+8)}$
6. $\frac{1}{x^3+1}$
7. $\frac{x^7}{(x^4-1)(x^2+3)}$
8. $\frac{1}{x^3(x+1)}$
9. $\frac{1}{x^4+x^2+1}$

Exercice 11 Déterminer les primitives en précisant les intervalles de validité.

1. $\frac{\arctan x}{\sqrt{x}}$
2. $\frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}$
3. $\frac{x^4\arctan x}{x^2+1}$
4. $\frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}$
5. $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$
6. $\frac{\sqrt{x-1}}{x+1}$

2.4 Trigonométrie circulaire

2.4.1 Formules de linéarisation

Les formules suivantes peuvent être utilisées afin d'abaisser le degré d'un polynôme trigonométrique (polynôme en cos ou en sin).

$$\begin{array}{rcl|rcl|rcl} \sin a\sin b &=& \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2} & \sin a\cos b &=& \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2} & \cos a\cos b &=& \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2} \\ \sin^2 x &=& \frac{1-\cos 2x}{2} & & & & \cos^2 x &=& \frac{1+\cos 2x}{2} \\ \sin^3 x &=& \frac{3\sin x-\sin 3x}{4} & & & & \cos^3 x &=& \frac{\cos 3x-3\cos x}{4} \end{array}$$

2.4.2 Polynômes en $\cos x$ et en $\sin x$

Voici un éventail de méthodes utiles pour calculer $\int \cos^p x\sin^q x\,\mathrm{d}x$.

		Parité de q	
		q pair	q impair
Parité de p	p pair	Utiliser les formules d'Euler	Poser $u=\cos x$
	p impair	Poser $u=\sin x$	Poser $u=\cos x$ ou $u=\sin x$

Formules d'Euler : $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$.

2.4.3 Règle de Bioche

On l'utilise pour intégrer des fractions rationnelles en $\cos x$ et en $\sin x$: $\int R(\cos x,\sin x)\,\mathrm{d}x$.
On étudie les invariances de R dans les changements suivants :

- Si on a l'invariance $x \leftarrow -x$, alors on effectue le changement $u=\cos x$.
- Si on a l'invariance $x \leftarrow \pi - x$, alors on effectue le changement $u=\sin x$.
- Si on a l'invariance $x \leftarrow \pi + x$, alors on effectue le changement $u=\tan x$.
- En cas d'échec, alors on effectue le changement $t=\tan\frac{x}{2}$.
  On rappelle alors les formules : $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$.

Exercice 12 Calculer les primitives suivantes.

1. $\int \sin 2x\cos 3x\,\mathrm{d}x$
2. $\int \cos^2 x\sin^3 x\,\mathrm{d}x$
3. $\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$
4. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$
5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$
6. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}\,\mathrm{d}x$
7. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$
8. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^6 x}$
9. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x-\cos 3x}$
10. $\int \frac{\sin^3 x\cos x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
11. $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x\sin^4 x}$
13. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan x}$
14. $\int \frac{\sin x}{3+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$
15. $\int \frac{\tan x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$
16. $\int \frac{\cos x+2\sin x}{\sin x-\cos x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 13 Symétries remarquables : utiliser le changement de variable $t = x - \frac{\pi}{4}$.

1. $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 14 Vers les séries de Fourier
Calculer les intégrales suivantes, pour $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$.

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(px)\cos(qx)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(px)\cos(qx)\,\mathrm{d}x$

Exercice 15 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et f une fonction continue de $[a; b]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in [a; b], f(a + b - x) = f(x)$.

1. Calculer $\displaystyle\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x$ en fonction de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \sin x}\,\mathrm{d}x$.

2.5 Trigonométrie hyperbolique

On peut retenir les formules suivantes, qui peuvent donner les formules de linéarisation en les retravaillant.

$$\begin{array}{rcl|rcl} \mathrm{sh}\,2x & = & 2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x & \mathrm{ch}\,2x & = & \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x \\ \mathrm{sh}\,(a+b) & = & \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{sh}\,b + \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{ch}\,b & \mathrm{ch}\,(a+b) & = & \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,b + \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,b \end{array}$$

On dispose également d'une variante de la règle de Bioche donnant les changements de variable conseillés. On s'intéresse aux invariances de la fonction obtenue en remplaçant ch par cos, sh par sin et th par tan :

- Si on a l'invariance $x \leftarrow -x$, alors on effectue le changement $u = \mathrm{ch}\,x$.
- Si on a l'invariance $x \leftarrow \pi - x$, alors on effectue le changement $u = \mathrm{sh}\,x$.
- Si on a l'invariance $x \leftarrow \pi + x$, alors on effectue le changement $u = \mathrm{th}\,x$.
- En cas d'échec, alors on effectue le changement $t = \mathrm{e}^x$.

Exercice 16 Calculer les primitives suivantes.

1. $\displaystyle\int \mathrm{sh}\,2x\,\mathrm{ch}\,3x\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}\,x}$
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}\,x}$
4. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}\,x - \mathrm{ch}\,3x}$
5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2 + \mathrm{ch}\,x}$
6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^3 x}$
7. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{th}\,x}{1 + \mathrm{ch}\,x}\,\mathrm{d}x$
8. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{ch}^3 x}{1 + \mathrm{sh}\,x}\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \mathrm{ch}\,x}$
10. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1 - \mathrm{th}\,x}$
11. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{ch}\,x + 2}{\mathrm{ch}\,x + 1}\,\mathrm{d}x$
12. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}\,x(2 + \mathrm{sh}\,x)}$

2.6 Intégrales abéliennes

On veut calculer $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)\,\mathrm{d}x$, où R est une fraction rationnelle.

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">$\sqrt{ax^2+bx+c}$ qu'on met sous forme canonique $\rightarrow \sqrt{a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}$
Changement de variable : $y = x + \frac{b}{2a}$, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$
On se ramène à $\sqrt{ay^2 + k}$</td></tr>
<tr><td>3 cas possibles</td><td>$a > 0$ et $k > 0$</td><td>$a > 0$ et $k < 0$</td><td>$a < 0$ et $k > 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Revenir à un cas de base</td><td rowspan="2">$\sqrt{ay^2+k} = \sqrt{a}\sqrt{y^2 + \frac{k}{a}}$
$= h\sqrt{a}\sqrt{\left(\frac{y}{h}\right)^2 + 1}$
On prend $h > 0$ et $h^2 = \frac{k}{a} > 0$
On pose $z = \frac{y}{h} \rightarrow \sqrt{z^2+1}$</td><td colspan="2">Les calculs se font de
façon similaire pour se ramener à :</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{z^2 - 1}$</td><td>$\sqrt{1 - z^2}$</td></tr>
<tr><td>Changement
de variable</td><td>$z = \mathrm{sh}\,\varphi$
$z^2 + 1 = \mathrm{ch}^2\varphi$</td><td>$z = \mathrm{ch}\,\varphi$
$z^2 - 1 = \mathrm{sh}^2\varphi$</td><td>$z = \sin\varphi$ ou $z = \cos\varphi$
$1 - z^2 = \cos^2\varphi$ ou $\sin^2\varphi$</td></tr>
</table>

Exercice 17 Pour les marathoniens
Calculer $F(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+2x+2}}$ (ne pas oublier l'ensemble de définition).

2.7 Fonctions à valeurs complexes

On veut intégrer $f : t \mapsto u(t) + \mathrm{i}v(t)$, avec u et v à valeurs réelles.
On définit alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$.
Une méthode pratique pour calculer une intégrale réelle est donc de passer dans $\mathbb{C}$:
$I = \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{2t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})t}\right)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int_0^\pi \mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1}{2+\mathrm{i}}\mathrm{e}^{(2+\mathrm{i})t}\right]_0^\pi\right)\ldots$

Exercice 18 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t\cos 2t\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos t\sin t}{\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x-\mathrm{i}}$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\mathrm{i}}$
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3-\mathrm{i}}$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-\mathrm{i}}$