Le problème de plongement de *Skorokhod*

Florian Lemonnier

Stage réalisé en juin-juillet 2014

Sous la direction de Alexander Cox, University of Bath

04 septembre 2014

On considère une marche aléatoire Z_n^λ, avec :

- $\mathcal{L}\left(Z_0^\lambda\right) = \lambda$ est intégrable
- Si $Z_n^\lambda = k \neq 0$, alors
  $\mathbb{P}\left(Z_{n+1}^\lambda = k+1\right) = \mathbb{P}\left(Z_{n+1}^\lambda = k-1\right) = \frac{1}{2}$
- Si $Z_n^\lambda = 0$, alors $Z_{n+1}^\lambda = 0$

On considère une marche aléatoire Z_n^λ, avec :

- $\mathcal{L}\left(Z_0^\lambda\right) = \lambda$ est intégrable
- Si $Z_n^\lambda = k \neq 0$, alors
  $\mathbb{P}\left(Z_{n+1}^\lambda = k+1\right) = \mathbb{P}\left(Z_{n+1}^\lambda = k-1\right) = \frac{1}{2}$
- Si $Z_n^\lambda = 0$, alors $Z_{n+1}^\lambda = 0$

Le problème de plongement de *Skorokhod* :

étant donné μ, on veut trouver un temps d'arrêt τ, tel que $\mathcal{L}\left(Z_\tau^\lambda\right) = \mu$.

Le 30 juin, A achète à B des calls européens pour 100 actions ABC Corp.
Le prix d'exercice est de 60 €/action, l'échéance est le 31 décembre.
Le 30 juin, ABC Corp cote 45 €, et A paie à B 15 €/action, soit 1 500 €.

Le 30 juin, A achète à B des calls européens pour 100 actions ABC Corp.
Le prix d'exercice est de 60 €/action, l'échéance est le 31 décembre.
Le 30 juin, ABC Corp cote 45 €, et A paie à B 15 €/action, soit 1 500 €.
Le 31 décembre :

- Si ABC Corp cote 80 €, A paie 6 000 € à B pour 100 actions. Ses actions valent 8 000 € et lui ont coûté 7 500 €.

Le 30 juin, A achète à B des calls européens pour 100 actions ABC Corp.
Le prix d'exercice est de 60 €/action, l'échéance est le 31 décembre.
Le 30 juin, ABC Corp cote 45 €, et A paie à B 15 €/action, soit 1 500 €.
Le 31 décembre :

- Si ABC Corp cote 80 €, A paie 6 000 € à B pour 100 actions. Ses actions valent 8 000 € et lui ont coûté 7 500 €.
- Si ABC Corp cote 50 €, A n'utilise pas ses calls. B conserve la prime de 1 500 € et ses actions ABC Corp.

Un call européen paie $(S_T - K)_+$ à l'échéance notée T, où S_t est le cours de l'action sous-jacente à l'instant t et K le prix d'exercice.

Un call européen paie $(S_T - K)_+$ à l'échéance notée T, où S_t est le cours de l'action sous-jacente à l'instant t et K le prix d'exercice. La théorie financière dit que :

- $e^{-rt}S_t$ est une martingale, où r est le taux d'intérêt
- le prix actuel du call européen est

$$C(K,T) = e^{-rT}\mathbb{E}\left[(S_T - K)_+\right]$$

Un call européen paie $(S_T - K)_+$ à l'échéance notée T, où S_t est le cours de l'action sous-jacente à l'instant t et K le prix d'exercice. La théorie financière dit que :

- $e^{-rt} S_t$ est une martingale, où r est le taux d'intérêt
- le prix actuel du call européen est
$$C(K,T) = e^{-rT} \mathbb{E}\left[(S_T - K)_+\right]$$

Prenons $r = 0$, notons p la densité de S_T, on a :

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 K}\left[C(K,T)\right] = p(K)$$

Donc $(C(K,T))_{K \in \mathbb{R}^+}$ nous donne $\mathcal{L}(S_T)$.

Et donc, les données dont on dispose actuellement sont :

- S_0, le prix actuel de l'action sous-jacente
- $\mathcal{L}\left(S_T\right)$
- $\left(S_t\right)_{t\in[0;T]}$ est une martingale

Maintenant on veut évaluer d'autres dérivés. Un call lookback paie $\sup_{0\leq t\leq T} S_t$ à l'échéance T, donc sa valeur actuelle est :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} S_t\right].$$

Maintenant on veut évaluer d'autres dérivés. Un call lookback paie $\sup_{0\leq t\leq T} S_t$ à l'échéance T, donc sa valeur actuelle est :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} S_t\right].$$

Un résultat général dit qu'on a : $S_t = B_{\tau_t}$, où B désigne le mouvement brownien, τ_t est un temps d'arrêt pour tout t, et $t \mapsto \tau_t$ est croissant.
Si on suppose que τ_t ne saute pas, $\sup_{0\leq t\leq T} S_t = \sup_{0\leq t\leq T} B_{\tau_t}$.

Maintenant on veut évaluer d'autres dérivés. Un call lookback paie $\sup_{0 \leq t \leq T} S_t$ à l'échéance T, donc sa valeur actuelle est :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} S_t\right].$$

Un résultat général dit qu'on a : $S_t = B_{\tau_t}$, où B désigne le mouvement brownien, τ_t est un temps d'arrêt pour tout t, et $t \mapsto \tau_t$ est croissant.

Si on suppose que τ_t ne saute pas, $\sup_{0 \leq t \leq T} S_t = \sup_{0 \leq t \leq T} B_{\tau_t}$.

On veut donc trouver $\tau = \tau_T$ tel que $B_\tau \sim \mu$, permettant, par exemple, de maximiser ou minimiser $\mathbb{E}\left[\sup_{s \leq \tau} B_s\right]$.

$\left(Z_n^\lambda\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.

$\left(Z_n^\lambda\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.
Par le théorème d'arrêt :

$$\text{Pour tout temps d'arrêt borné } \tau,\ \mathbb{E}\left[Z_\tau^\lambda\right] = \mathbb{E}\left[Z_0^\lambda\right]$$

$\left(Z_n^\lambda\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.
Par le théorème d'arrêt :

$$\text{Pour tout temps d'arrêt fini ps } \tau,\ \mathbb{E}\left[Z_{\tau\wedge n}^\lambda\right] = \mathbb{E}\left[Z_0^\lambda\right]$$

$\left(Z_n^\lambda\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.
Par le théorème d'arrêt :

$$\text{Pour tout temps d'arrêt fini ps } \tau, \ \mathbb{E}\left[Z_{\tau\wedge n}^\lambda\right] = \mathbb{E}\left[Z_0^\lambda\right]$$

Puis par *Fatou* :

$$\text{Pour tout temps d'arrêt fini ps } \tau, \ \mathbb{E}\left[Z_\tau^\lambda\right] \leq \mathbb{E}\left[Z_0^\lambda\right]$$

$\left(Z_n^\lambda\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.
Par le théorème d'arrêt :

$$\text{Pour tout temps d'arrêt fini ps } \tau,\ \mathbb{E}\left[Z_{\tau\wedge n}^\lambda\right] = \mathbb{E}\left[Z_0^\lambda\right]$$

Puis par *Fatou* :

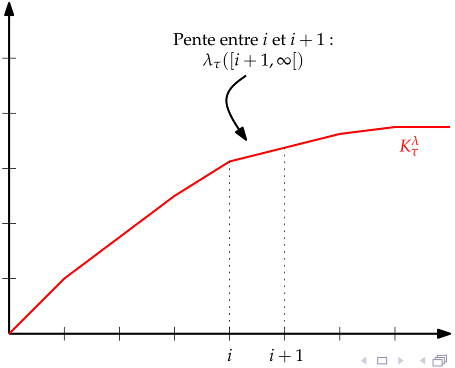
$$\text{Pour tout temps d'arrêt fini ps } \tau,\ \mathbb{E}\left[Z_{\tau}^\lambda\right] \leq \mathbb{E}\left[Z_0^\lambda\right]$$

Donc la moyenne de μ doit être inférieure à celle de λ.

Définition

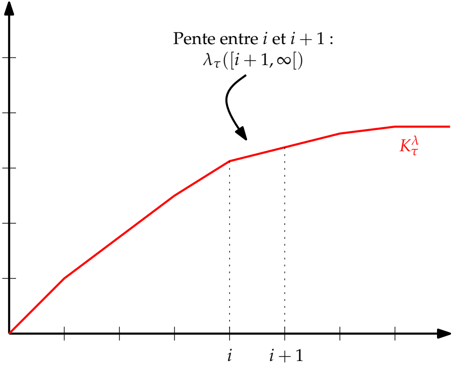
On définit le potentiel comme la fonction :

$$K_\tau^\lambda : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ y & \longmapsto & \mathbb{E}\left[Z_\tau^\lambda \wedge y\right] \end{array} \right.$$



Lemme

La donnée du potentiel K_τ^λ est équivalente à la donnée de la loi λ_τ, loi de Z_τ^λ.



Soit $y > 0$.
Est-ce que $\left(Z_n^\lambda \wedge y\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale ?

Soit $y > 0$.
Est-ce que $\left(Z_n^\lambda \wedge y\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale ?
Non :

$$\mathbb{E}\left[Z_{n+1}^\lambda \wedge y \middle| \mathcal{F}_n\right] = \left(Z_n^\lambda \wedge y\right) - \frac{1}{2}\mathbb{1}_{Z_n^\lambda = y}$$

Soit $y > 0$.

$$\left(Z_n^\lambda \wedge y + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{Z_i^\lambda = y} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$ est une martingale.

Soit $y > 0$.

$$\left(Z_n^\lambda \wedge y + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{Z_i^\lambda = y} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$ est une martingale.

Par théorème d'arrêt, pour τ fini ps :

$$\mathbb{E}\left[Z_0^\lambda \wedge y \right] = \mathbb{E}\left[Z_{\tau \wedge n}^\lambda \wedge y \right] + \frac{1}{2} \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{(\tau \wedge n)-1} \mathbb{1}_{Z_i^\lambda = y} \right]$$

Soit $y > 0$.

$$\left(Z_n^\lambda \wedge y + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{Z_i^\lambda = y}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{est une martingale.}$$

Par théorème d'arrêt, pour τ fini ps :

$$\mathbb{E}\left[Z_0^\lambda \wedge y\right] = \underbrace{\mathbb{E}\left[Z_{\tau\wedge n}^\lambda \wedge y\right]}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\mathbb{E}\left[Z_\tau^\lambda \wedge y\right]} + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{(\tau\wedge n)-1} \mathbb{1}_{Z_i^\lambda = y}\right]$$

Soit $y > 0$.

$$\left(Z_n^\lambda \wedge y + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{Z_i^\lambda = y} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$ est une martingale.

Par théorème d'arrêt, pour τ fini ps :

$$\mathbb{E}\left[Z_0^\lambda \wedge y\right] = \underbrace{\mathbb{E}\left[Z_{\tau\wedge n}^\lambda \wedge y\right]}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[Z_\tau^\lambda \wedge y\right]} + \underbrace{\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{(\tau\wedge n)-1} \mathbb{1}_{Z_i^\lambda = y}\right]}_{\text{positif et borné}}$$

Soit $y > 0$.

$$\left(Z_n^\lambda \wedge y + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{Z_i^\lambda = y} \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{est une martingale.}$$

Par théorème d'arrêt, pour τ fini ps :

$$\mathbb{E}\left[Z_0^\lambda \wedge y \right] = \underbrace{\mathbb{E}\left[Z_{\tau\wedge n}^\lambda \wedge y \right]}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[Z_\tau^\lambda \wedge y \right]} + \underbrace{\frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{(\tau\wedge n)-1} \mathbb{1}_{Z_i^\lambda = y} \right]}_{\text{positif et borné}}$$

On en déduit :

$$\mathbb{E}\left[Z_0^\lambda \wedge y \right] \geq \mathbb{E}\left[Z_\tau^\lambda \wedge y \right]$$

Le potentiel de μ est en-dessous du potentiel de λ.

Un exemple : $\lambda = \delta_2$ et $\mu = \frac{2}{3}\delta_1 + \frac{1}{3}\delta_3$

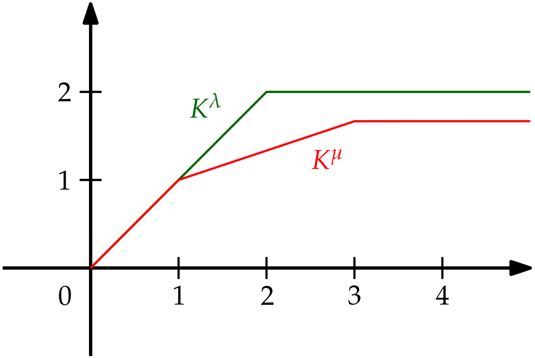
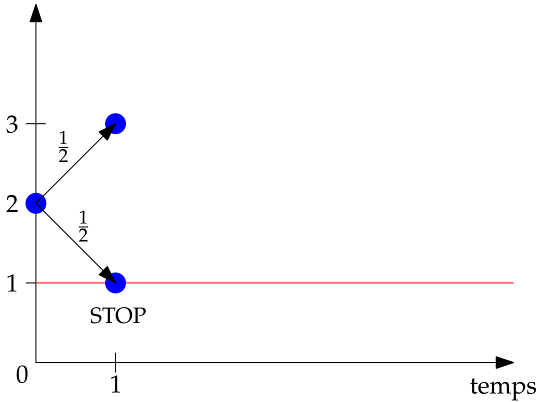
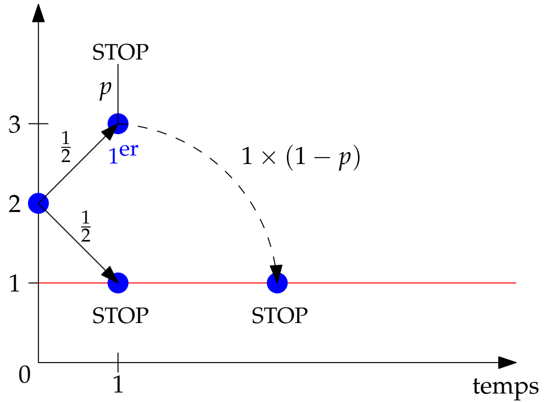


Figure: Le potentiel de λ est au-dessus du potentiel de μ.

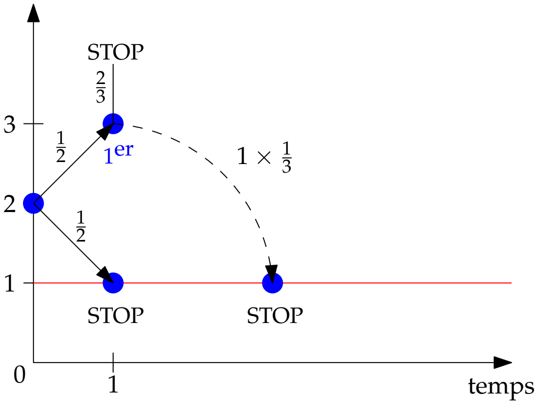
Un exemple : $\lambda = \delta_2$ et $\mu = \frac{2}{3}\delta_1 + \frac{1}{3}\delta_3$



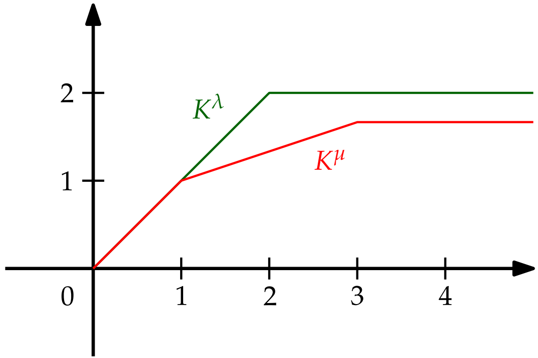
Un exemple : $\lambda = \delta_2$ et $\mu = \frac{2}{3}\delta_1 + \frac{1}{3}\delta_3$



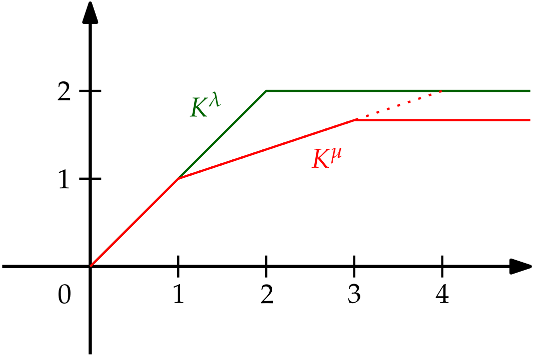
Un exemple : $\lambda = \delta_2$ et $\mu = \frac{2}{3}\delta_1 + \frac{1}{3}\delta_3$



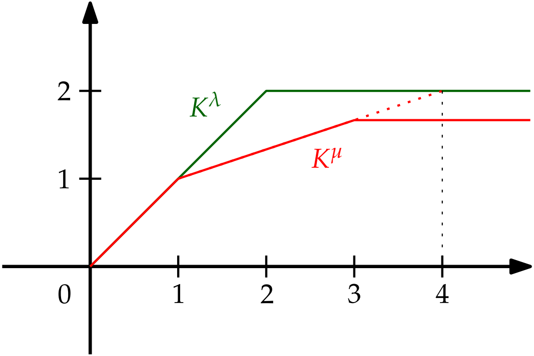
Un exemple : $\lambda = \delta_2$ et $\mu = \frac{2}{3}\delta_1 + \frac{1}{3}\delta_3$



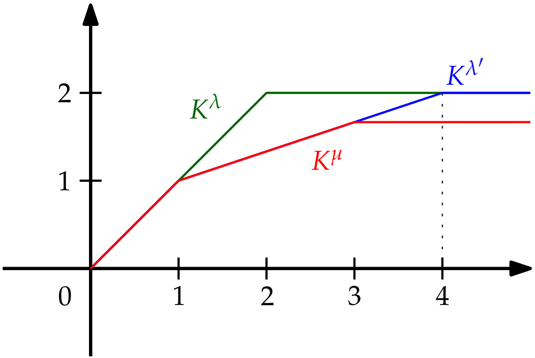
Un exemple : $\lambda = \delta_2$ et $\mu = \frac{2}{3}\delta_1 + \frac{1}{3}\delta_3$



Un exemple : $\lambda = \delta_2$ et $\mu = \frac{2}{3}\delta_1 + \frac{1}{3}\delta_3$



Un exemple : $\lambda = \delta_2$ et $\mu = \frac{2}{3}\delta_1 + \frac{1}{3}\delta_3$



Lemme

Connaissant le point d'arrêt, on peut borner le maximum atteint.

$$\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\} \text{ croissante,}$$
$$Z^{\lambda}_{\tau_{AY}} = x \Longrightarrow f(x-1) \leq \overline{Z^{\lambda}_{\tau_{AY}}} \leq f(x)$$

Lemme

Connaissant le point d'arrêt, on peut borner le maximum atteint.

$$\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\} \text{ croissante,}$$
$$Z^{\lambda}_{\tau_{AY}} = x \Longrightarrow f(x-1) \leq \overline{Z^{\lambda}_{\tau_{AY}}} \leq f(x)$$

Théorème

τ_{AY} *maximise la quantité* $\mathbb{P}\left(\overline{Z^{\lambda}_{\tau}} \geq x\right)$, *où* $x \in \mathbb{N}$, *sur l'ensemble des temps d'arrêt finis p.s.* τ *tels que* $Z^{\lambda}_{\tau} \sim \mu$.

Lemme

Connaissant le point d'arrêt, on peut borner le maximum atteint.

$$\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\} \text{ croissante,}$$
$$Z^{\lambda}_{\tau_{AY}} = x \Longrightarrow f(x-1) \leq \overline{Z^{\lambda}_{\tau_{AY}}} \leq f(x)$$

Théorème

τ_{AY} *maximise la quantité* $\mathbb{P}\left(\overline{Z^{\lambda}_{\tau}} \geq x\right)$, *où* $x \in \mathbb{N}$, *sur l'ensemble des temps d'arrêt finis p.s.* τ *tels que* $Z^{\lambda}_{\tau} \sim \mu$.
Donc il maximise également : $\mathbb{E}\left[\overline{Z^{\lambda}_{\tau}}\right] = \sum_{x \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\overline{Z^{\lambda}_{\tau}} \geq x\right)$.

Le problème de plongement de *Skorokhod* a une utilité dans l'étude des warrants en bourse. Leur importance est aujourd'hui croissante.

Le problème de plongement de *Skorokhod* a une utilité dans l'étude des warrants en bourse. Leur importance est aujourd'hui croissante.

- 1^{er} warrant introduit en bourse en 1985 en Suisse ;

Le problème de plongement de *Skorokhod* a une utilité dans l'étude des warrants en bourse. Leur importance est aujourd'hui croissante.

- 1$^{\text{er}}$ warrant introduit en bourse en 1985 en Suisse ;
- Échanges de warrants à Paris : 2 G€ en 1999, 10 G€ en 2007 ;

Le problème de plongement de *Skorokhod* a une utilité dans l'étude des warrants en bourse. Leur importance est aujourd'hui croissante.

- 1$^{\text{er}}$ warrant introduit en bourse en 1985 en Suisse ;
- Échanges de warrants à Paris : 2 G€ en 1999, 10 G€ en 2007 ;
- 12 % des transactions boursières à Hong Kong en 2009.