Fascinants nombres de *Bernoulli*

Lecture dirigée par Bernard Le Stum, Université de Rennes 1 - ENS Ker Lann

Laura Gay Florian Lemonnier

19 avril 2013

Table des matières

Introduction

On raconte que *Gauss* (1777-1855), alors écolier, découvrit la formule $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. La formule de *Gauss* était bien sûr connue des Pythagoriciens, au V$^{\text{ème}}$ siècle avant Jésus-Christ. La somme des carrés successifs était aussi connue pendant l'Antiquité.

Au XI$^{\text{ème}}$ siècle, *Al-Karagi*, découvrit l'identité remarquable de la somme des cubes. Ces formules furent popularisées plus tard par Jacques *Bernoulli* (1654-1705) qui en obtint le crédit, mais c'est *de Moivre* qui donna le nom de *Bernoulli* à la suite de nombres que nous allons présenter.

On pense souvent que "*Bernoulli*" ne désigne qu'une personne. En fait, il s'agit d'une famille entière de mathématiciens. Premier de la lignée de ces célèbres mathématiciens suisses, Jacques (Jakob) étudie les probabilités et les séries numériques, ce qui le pousse à définir les fameux nombres de *Bernoulli* décrits plus tard.

Comment ont-ils été d'abord introduits ?

Quelles propriétés remarquables présentent-ils ?

Quels outils mathématiques utilise-t-on pour mieux les connaître ?

Quelle utilité ont-ils dans les mathématiques ?

Quelles conjectures sont faites autour d'eux ?

On tentera ici d'apporter des pistes de réponses à ces questions.

1 D'où viennent-ils ?

1.1 Construction

Définition 1 Sommes de *Bernoulli*
Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$.

On définit les sommes de *Bernoulli* comme suit : $S_p(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^p$.

On connaît, par exemple : $S_1(n) = 0^1 + 1^1 + \ldots + (n-1)^1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$

$$S_2(n) = 0^2 + 1^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

On pressent alors que $S_3(n) = \dfrac{n(n-1)(2n-1)(3n-1)}{4!} \ldots$ Mais il n'en est rien !

On peut calculer S_3 ainsi (méthode similaire pour S_p avec $p \geq 3$: utiliser le binôme de *Newton*) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
(n-1)^4 & - & (n-2)^4 & = & 4(n-1)^3 & -6(n-1)^2 & +4(n-1) & -1 \\
(n-2)^4 & - & (n-3)^4 & = & 4(n-2)^3 & -6(n-2)^2 & +4(n-2) & -1 \\
 & & & \vdots & & & & \\
1^4 & - & 0^4 & = & 1 & & & \\
\hline
 & & (n-1)^4 & = & 4S_3(n) & -6S_2(n) & +4S_1(n) & -(n-1)
\end{array}$$

Donc $S_3(n) = \dfrac{n^2(n-1)^2}{4}$.

Regardons le problème sous un autre angle :

$$\begin{array}{lcl}
2S_1(n) & = & 1n^2 - 1n \\
3S_2(n) & = & 1n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\
4S_3(n) & = & 1n^4 - 2n^3 + 1n^2 + 0n \\
5S_4(n) & = & 1n^5 - \frac{5}{2}n^4 + \frac{5}{3}n^3 + 0n^2 - \frac{1}{6}n \\
6S_5(n) & = & 1n^6 - 3n^5 + \frac{5}{2}n^4 + 0n^3 - \frac{1}{2}n^2 + 0n \\
7S_6(n) & = & 1n^7 - \frac{7}{2}n^6 + \frac{7}{2}n^5 + 0n^4 - \frac{7}{6}n^3 + 0n^2 + \frac{1}{6}n
\end{array}$$

Remarquons la régularité de ce tableau, ne serait-ce que dans les signes des coefficients.

Mettons maintenant ce tableau en comparaison avec le triangle de *Pascal* :

$$\begin{array}{llllllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1
\end{array}$$

La colonne verte diffère d'un facteur $\times\dfrac{-1}{2}$, la colonne orange diffère d'un facteur $\times\dfrac{1}{6}$, la colonne rose d'un facteur $\times\dfrac{-1}{30}$.

En fait, ce sont ces nombres $\left(1, \dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{6}, 0, \dfrac{-1}{30}, 0, \ldots\right)$ qu'on appelle "nombres de *Bernoulli*".

1.2 Preuve d'existence

Théorème 1 Existence et définition des nombres de *Bernoulli*
On peut écrire, pour tout couple $(p, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$: $S_p(n) = \dfrac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p}\dbinom{p+1}{k} B_k n^{p+1-k}$, où les nombres B_k sont indépendants de n et p.

La suite $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la suite des nombres de *Bernoulli*, dont les premiers termes sont $1, \dfrac{-1}{2}, \dfrac{1}{6}, 0 \ldots$

Démonstration 1 On va raisonner par récurrence.

Notons $(\mathcal{Q}_{n,p})$ la propriété : $S_p(n) = \dfrac{1}{p+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}B_k n^{p+1-k}$ et $B_p = \dfrac{(-1)^p}{p+1}\left(p + \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p+1}{k}(-1)^{k+1}B_k\right)$ (résultat qui tombera tout seul dans l'hérédité).

On a bien : $\displaystyle\sum_{k=0}^{1}\binom{2}{k}B_k 1^{2-k} = 1\times B_0 + 2\times B_1 = 0 = S_1(1)$. Donc $(\mathcal{Q}_{1,1})$ est bien vraie.

Soit $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$; supposons : $\forall j\leq n,\ \forall k\leq q,\ \left(\mathcal{Q}_{j,k}\right)$, pour démontrer $(\mathcal{Q}_{n+1,p})$ et $(\mathcal{Q}_{n,p+1})$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}B_k\left((n+1)^{p+1-k}-n^{p+1-k}\right) &= \sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}B_k\left[\sum_{j=0}^{p-k}\binom{p+1-k}{j}n^j\right]\\
&= \sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{p-k}\binom{p+1}{k}B_k\binom{p+1-k}{j}n^j\\
&= \sum_{j=0}^{p}\sum_{k=0}^{p-j}\binom{p+1}{k}B_k\binom{p+1-k}{j}n^j\\
&= n^p\sum_{k=0}^{0}\binom{p+1}{k}B_k\binom{p+1-k}{p} + \sum_{j=0}^{p-1}n^j\left[\sum_{k=0}^{p-j}\binom{p+1}{k}B_k\binom{p+1-k}{j}\right]\\
&= (p+1)n^p + \sum_{j=0}^{p-1}n^j\left[\sum_{k=0}^{p-j}\binom{p+1}{k}B_k\binom{p+1-k}{j}\right]
\end{aligned}$$

Or
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p-j}\binom{p+1}{k}B_k\binom{p+1-k}{j} &= \frac{(p+1)!}{j!}\sum_{k=0}^{p-j}\frac{1}{k!(p+1-k-j)!}B_k\\
&= \binom{p+1}{j}\sum_{k=0}^{p-j}\binom{p+1-j}{k}B_k\\
&= \binom{p+1}{j}(p+1-j)S_{p-j}(1) \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $S_p(n+1) = n^p + S_p(n) = n^p + \dfrac{1}{p+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}B_k n^{p+1-k} = \dfrac{1}{p+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}B_k(n+1)^{p+1-k}$, par les calculs qui précèdent.

Donc $(\mathcal{Q}_{n+1,p})$ est bien vraie. Démontrons désormais $(\mathcal{Q}_{n,p+1})$.

On a les égalités suivantes :
$$\begin{aligned}
(n-1)^{p+1}-(n-2)^{p+1} &= \sum_{k=0}^{p-1}\binom{p+1}{k+1}(-1)^k(n-1)^{p-k} + (-1)^{p+1}\\
(n-2)^{p+1}-(n-3)^{p+1} &= \sum_{k=0}^{p-1}\binom{p+1}{k+1}(-1)^k(n-2)^{p-k} + (-1)^{p+1}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

En sommant, on obtient donc :
$$\begin{aligned}
(n-1)^{p+2} &= \sum_{k=0}^{p}\binom{p+2}{k+1}(-1)^k S_{p+1-k}(n) + (-1)^{p+1}(n-1)\\
&= (p+2)S_{p+1}(n) + \sum_{j=1}^{p}\binom{p+2}{j}(-1)^{p+1-j}S_j(n) + (-1)^{p+1}(n-1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(p+2)S_{p+1}(n) &= \sum_{j=0}^{p+2}\binom{p+2}{j}(-1)^j n^{p+2-j} - \sum_{j=1}^{p}\binom{p+2}{j}(-1)^{p+1-j}S_j(n) - (-1)^{p+1}(n-1) \\
&= n^{p+2} + \sum_{j=1}^{p}\binom{p+2}{j}(-1)^j n^{p+2-j} + (p+2)(-1)^{p+1}n + (-1)^{p+2} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{p}\binom{p+2}{j}(-1)^{p+2-j}S_j(n) - (-1)^{p+1}n + (-1)^{p+1} \\
&= n^{p+2} + (p+1)(-1)^{p+1}n + \sum_{j=1}^{p}\binom{p+2}{j}(-1)^j n^{p+2-j} + \sum_{j=1}^{p}\binom{p+2}{j}(-1)^{p+2-j}S_j(n) \\
&= n^{p+2} + (p+1)(-1)^{p+1}n + \sum_{j=1}^{p}\binom{p+2}{j}(-1)^j n^{p+2-j} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{j+1}\binom{p+2}{j}(-1)^{p+2-j}\binom{j+1}{k}B_k n^{j+1-k} \qquad \text{(Posons } i=j-k\text{)} \\
&= n^{p+2} + (p+1)(-1)^{p+1}n + \sum_{j=1}^{p}\binom{p+2}{j}(-1)^j n^{p+2-j} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=0}^{j}\frac{1}{j+1}\binom{p+2}{j}(-1)^{p+2-j}\binom{j+1}{j-i}B_{j-i}n^{i+1} \\
&= n^{p+2} + (p+1)(-1)^{p+1}n + \sum_{j=1}^{p}\binom{p+2}{j}(-1)^j n^{p+2-j} \\
&\quad + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=0}^{j}\frac{(p+2)!}{(p+2-j)!(j-i)!(i+1)!}(-1)^{p+2-j}B_{j-i}n^{i+1} \\
&= n^{p+2} + (p+1)(-1)^{p+1}n + \sum_{j=1}^{p}\binom{p+2}{j}(-1)^j n^{p+2-j} + \left(\sum_{j=1}^{p}\frac{(p+2)!}{(p+2-j)!j!}(-1)^{p+2-j}B_j\right)n \\
&\quad + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=i}^{p}\frac{(p+2)!}{(p+2-j)!(j-i)!(i+1)!}(-1)^{p+2-j}B_{j-i}n^{i+1} \text{ (Posons } k=p+1-i\text{)} \\
&= n^{p+2} + (-1)^{p+1}\left(p+1+\sum_{j=1}^{p}\binom{p+2}{j}(-1)^{j+1}B_j\right)n + \sum_{j=1}^{p}\binom{p+2}{j}(-1)^j n^{p+2-j} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{p}\frac{(p+2)!}{(p+2-k)!}n^{p+2-k}\sum_{j=p+1-k}^{p}\frac{1}{(p+2-j)!(j+k-p)!}(-1)^{p+2-j}B_{k+j-p-1} \\
&= n^{p+2} + (-1)^{p+1}\left(p+1+\sum_{j=1}^{p}\binom{p+2}{j}(-1)^{j+1}B_j\right)n + \sum_{j=1}^{p}\binom{p+2}{j}(-1)^j n^{p+2-j} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{p}\binom{p+2}{k}n^{p+2-k}k!\sum_{l=0}^{k-1}\frac{1}{(k-l+1)!l!}(-1)^{j+1-l}B_l \text{ (En posant } l=j-p-1+k\text{)} \\
&= n^{p+2} + (-1)^{p+1}\left(p+1+\sum_{j=1}^{p}\binom{p+2}{j}(-1)^{j+1}B_j\right)n + \sum_{k=1}^{p}\binom{p+2}{k}(-1)^k n^{p+2-k} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{p}\binom{p+2}{k}n^{p+2-k}(-1)^k\sum_{l=0}^{k-1}\frac{1}{k-l+1}\binom{k}{l}(-1)^{l+1}B_l \\
&= n^{p+2} + (-1)^{p+1}\left(p+1+\sum_{j=1}^{p}\binom{p+2}{j}(-1)^{j+1}B_j\right)n \\
&\quad + \sum_{k=1}^{p}\binom{p+2}{k}n^{p+2-k}(-1)^k\left[1+\sum_{l=0}^{k-1}\frac{1}{k-l+1}\binom{k}{l}(-1)^{l+1}B_l\right]
\end{aligned}
$$

$$\text{Or } 1+\sum_{l=0}^{k-1}\frac{1}{k-l+1}\binom{k}{l}(-1)^{l+1}B_l = 1+\frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{k+1}{l}(-1)^{l+1}B_l$$

$$= 1+\frac{1}{k+1}\sum_{l=1}^{k-1}\binom{k+1}{l}(-1)^{l+1}B_l - \frac{1}{k+1}$$

$$= \frac{1}{k+1}\left[k+\sum_{l=1}^{k-1}\binom{k+1}{l}(-1)^{l+1}B_l\right]$$

$$= (-1)^k B_k \text{ , par hypothèse de récurrence.}$$

Donc, finalement, $S_{p+1}(n) = \dfrac{1}{p+2}\displaystyle\sum_{k=0}^{p+1}\binom{p+2}{k}B_k n^{p+2-k}$, en prenant, par construction,

$$B_{p+1} = \frac{(-1)^{p+1}}{p+2}\left(p+1+\sum_{k=1}^{p}\binom{p+2}{k}(-1)^{k+1}B_k\right).$$

Donc $\left(\mathcal{Q}_{n,p+1}\right)$ est bien vraie. La récurrence a réussi.

2 Comment les étudie-t-on et quelles sont leurs propriétés ?

2.1 Premières propriétés des nombres de *Bernoulli*

Proposition 2 Relations de récurrence entre les nombres de *Bernoulli*

$$\forall p \geq 1, \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} B_k = 0$$

$$\forall p \geq 1, B_p = \frac{(-1)^p}{p+1}\left(p + \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p+1}{k}(-1)^{k+1}B_k\right).$$

Démonstration 2
La première propriété est donnée par le fait que $S_p(1) = 0$ pour $p \geq 1$.
La seconde propriété découle de la démonstration précédente.

Proposition 3
À partir de B_3, tous les nombres de *Bernoulli* de rang impair sont nuls.

Démonstration 3 Récurrence forte sur $k \geq 1$: $B_{2k+1} = 0$.
On a bien : $B_3 = 0$.

$$\begin{aligned}
B_{2k+1} &= \frac{-1}{2k+2}\left(2k+1+\sum_{j=1}^{2k}\binom{2k+2}{j}(-1)^{j+1}B_j\right) = \frac{-1}{2k+2}\left(2k+1+\binom{2k+2}{1}B_1+\sum_{m=1}^{k}\binom{2k+2}{2m}(-1)^{2m+1}B_{2m}\right)\\
&= \frac{-1}{2k+2}\left(2k+2+\binom{2k+2}{1}B_1-\sum_{m=0}^{k}\binom{2k+2}{2m}B_{2m}\right)\\
&= \frac{-1}{2k+2}\left(2k+2+\binom{2k+2}{1}B_1-\sum_{m=0}^{k}\binom{2k+2}{2m}B_{2m}-\underbrace{\sum_{m=1}^{k-1}\binom{2k+2}{2m+1}B_{2m+1}}_{=0\text{, par hypothèse}}\right)\\
&= \frac{-1}{2k+2}\left(2k+2+2\binom{2k+2}{1}B_1-\sum_{l=0}^{2k}\binom{2k+2}{l}B_l\right) = \frac{1}{2k+2}\sum_{l=0}^{2k}\binom{2k+2}{l}B_l = \frac{1}{2k+2}\times 0 = 0
\end{aligned}$$

2.2 Aspects arithmétiques, théorème de *Von Staudt-Clausen*

Les nombres de Bernoulli sont rationnels. On peut factoriser leurs dénominateurs en facteurs premiers. On trouve :

$$\begin{aligned}
B_0 &= 1 & B_{10} &= \frac{5}{2\cdot 3\cdot 11}\\
-B_1 &= \frac{1}{2} & -B_{12} &= \frac{691}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 13}\\
B_2 &= \frac{1}{2\cdot 3} & B_{14} &= \frac{7}{2\cdot 3}\\
-B_4 &= \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5} & -B_{16} &= \frac{3617}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 17}\\
B_6 &= \frac{1}{2\cdot 3\cdot 7} & B_{18} &= \frac{43867}{2\cdot 3\cdot 7\cdot 19}\\
-B_8 &= \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5} & -B_{20} &= \frac{283\cdot 617}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 11}
\end{aligned}$$

On voit que les dénominateurs obéissent à des régularités stupéfiantes !

En premier lieu, ils sont tous pairs sauf le premier, et ils sont tous divisibles par 3, sauf les deux premiers.
On remarque ensuite que les dénominateurs de B_4, B_8, B_{12} ... sont tous divisibles par 5, et que ceux de B_6, B_{12}, B_{18} ... sont divisibles par 7.
On pourrait conjecturer qu'un nombre premier q divise les dénominateurs de tous nombres de *Bernoulli* B_{q-1}, $B_{2(q-1)}$, $B_{3(q-1)}$ ... et seulement ceux-là.
De plus que q^2 ne divise aucun de ces dénominateurs.

Cela donne une règle pour calculer le dénominateur de B_{2p}. On commence par faire la liste des diviseurs de $2p$ augmentés d'une unité ; on élimine ensuite de cette liste tous les nombres qui ne sont pas premiers ; le dénominateur de B_{2p} est alors le produit des éléments restants.
Par exemple, les diviseurs de 10 augmentés d'une unité sont : 2, 3, 6 et 11. Les nombres premiers de cette liste sont : 2, 3 et 11. Le dénominateur de B_{10} est donc $2 \cdot 3 \cdot 11$.

Un résultat encore plus précis a été obtenu par *Von Staudt* et *Clausen* en 1840 : la somme $B_p + \sum\limits_{\substack{q \text{ premier,} \\ q-1|p}} \frac{1}{q}$ est un nombre entier. Nous allons le démontrer en quelques étapes.

Définition 2 Les nombres q-entiers
On dit qu'un nombre rationnel est q-entier si, sous forme irréductible, son dénominateur ne contient pas q dans sa décomposition en facteurs premiers.

Définition 3 Congruences sur l'anneau $\mathbb{Z}_q$
Grâce à la théorie sur l'anneau $\mathbb{Z}_q$ des nombres q-entiers, on définit la congruence modulo q pour les rationnels :
Soient $m, w, m', w' \in \mathbb{Z}$ tels que $\frac{m}{w}$ et $\frac{m'}{w'}$ soient irréductibles, on a :

$$\frac{m}{w} \equiv \frac{m'}{w'} \; [q] \Leftrightarrow \frac{m}{w} = \frac{m'}{w'} + q\frac{m''}{w''} \text{ où } m'', w'' \in \mathbb{Z} \text{ et } \frac{m''}{w''} \text{ est irréductible avec } q \nmid w''.$$

Proposition 4
Soit $p \geq 2$ et q un nombre premier. On a les congruences suivantes :

$$\begin{array}{llll} \text{Si} & (q-1) \nmid p & \text{alors} & S_p(q) \equiv 0 \; [q] \\ \text{Si} & (q-1) \mid p & \text{alors} & S_p(q) \equiv -1 \; [q] \end{array}$$

Démonstration 4
Par définition, $S_p(q) = \sum\limits_{k=0}^{q-1} k^p$.
Cas 1 : $(q-1) \nmid p$
Soit g une racine primitive modulo q (*ie* un générateur de $\mathbb{Z}/_{q\mathbb{Z}}{}^*$).
Alors : $g^{q-1} \equiv 1 \; [q]$ et $g^p \not\equiv 1 \; [q]$.
On a donc : $S_p(q) = \sum\limits_{k=0}^{q-1} k^p = \sum\limits_{k=1}^{q-1} k^p \equiv \sum\limits_{r=0}^{q-2} g^{pr} \equiv \frac{1 - g^{(q-1)p}}{1 - g^p} \equiv 0 \; [q]$.
Cas 2 : $(q-1)|p$
Pour $1 \leq k \leq q-1$, on a, grâce au petit théorème de *Fermat* : $k^p \equiv 1 \; [q]$.
Et donc $S_p(q) \equiv \sum\limits_{k=1}^{q-1} 1 \equiv q - 1 \equiv -1 \; [q]$.

Proposition 5
Soit $p \geq 2$ et q un nombre premier.
Si $(q-1) \nmid p$, alors B_p est q-entier (et qB_p est également q-entier).
Si $(q-1) \mid p$, alors qB_p est q-entier et $qB_p \equiv -1\ [q]$.

Démonstration 5 On procède par récurrence forte sur $p \geq 2$.
Si $p = 2$ et $q = 2 : 1 \mid 2$ et $2B_2 = \dfrac{1}{3}$ ne contient pas 2 au dénominateur.

$q = 3 : 2 \mid 2$ et $3B_2 = \dfrac{1}{2}$ ne contient pas 3 au dénominateur.

$q \geq 5 : (q-1) \nmid 2$ et $B_2 = \dfrac{1}{2 \times 3}$ ne contient pas q au dénominateur.

Soit désormais $p \geq 2$, on suppose la proposition vraie pour tout $k \leq p-1$.
On part de la formule : $(p+1)S_p(q) = (p+1)qB_p + \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k} B_k q^{p+1-k}$.
On la réécrit : $qB_p = S_p(q) - \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{p+1}\binom{p+1}{k} qB_k q^{p-k}$.
On veut montrer que tous les termes figurant dans la somme sont des nombres q-entiers et sont divisibles par q (*ie* présentent q au numérateur mais pas au dénominateur).
Par hypothèse de récurrence, qB_k pour $k \leq p-1$ est q-entier.
Regardons dans la somme le terme $C_k = \dfrac{1}{p+1}\dbinom{p+1}{k} q^{p-k}$, pour k entier pair inférieur à $p-1$ (on utilise le fait que B_p soit nul quand p est impair différent de 1).
Si $q = 2$: Comme $p+1$ est impair, et $\dbinom{p+1}{k} 2^{p-k}$ est entier, C_k est 2-entier et divisible par 2 (car $k \leq p-1$).
Si $q > 2$: $C_k = \dfrac{p(p-1)\dots(k+1)}{(p-k+1)!} q^{p-k}$.

Le nombre q figure dans la décomposition en facteurs premiers de $(p-k+1)!$ avec l'exposant

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{p-k+1}{q^i} \right\rfloor < \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{p-k+1}{q^i} \leq \frac{p-k+1}{q} \frac{1}{1-\frac{1}{q}} = \frac{p-k+1}{q-1} \leq \frac{p-k+1}{2} \leq p-k+1-1 = p-k$$

(Cette suite d'inégalités étant vraie car $q \geq 3$ et $p-k+1 \geq 2$.)

Ainsi, $\dfrac{1}{(p-k+1)!} q^{p-k}$(et C_k) n'a pas q au dénominateur, il est q-entier et divisible par q car $p-k \geq 1$.

La formule écrite plus haut nous montre que qB_p est q-entier car $S_p(q)$ est entier donc q-entier et le terme de la somme est également q-entier.
De la récurrence, on a montré que qB_k pour $k \leq p$ est q-entier. De plus, on a $qB_p \equiv S_p(q)\ [q]$. Par la proposition précédente,
Si $(q-1) \nmid p$, alors $qB_p \equiv 0\ [q]$, *ie* B_p est q-entier $\left(\text{car } qB_p = q\dfrac{m}{n} \text{ où } q \nmid n\right)$
Si $(q-1) \mid p$, alors $qB_p \equiv -1\ [q]$.
La récurrence est ainsi vérifiée.

Théorème 6 ***Von Staudt-Clausen***
La somme $B_p + \displaystyle\sum_{\substack{q \text{ premier,} \\ q-1 \mid p}} \frac{1}{q}$ est un nombre entier.

Démonstration 6 On va montrer que cette quantité est q'-entière pour tout q' premier.
Si $(q'-1) \nmid p$, B_p est q'-entier (d'après la proposition précédente), et tous les termes de la somme sont également q'-entiers.
Si $(q'-1) \mid p$, à part $\frac{1}{q'}$, tous les termes de la somme sont q'-entiers. Or, on a aussi $q'B_p \equiv -1\ [q']$, *ie* $B_p = \frac{-1}{q'} + \frac{m}{w}$ où w n'est pas divisible par q' $\left(\text{donc } \dfrac{m}{w}\ q'\text{-entier}\right)$.

Ainsi, les termes en $\frac{1}{q'}$ s'annulent et notre quantité se résume à $\frac{m}{w}$ qui est q'-entière.
$B_p + \sum_{\substack{q \text{ premier,} \\ q-1|p}} \frac{1}{q}$ est donc q'-entière pour tout q' premier.
Son dénominateur ne contient donc aucun nombre premier, il vaut 1 et notre quantité est entière.

2.3 Fonction génératrice

Proposition 7 Fonction génératrice
La série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} x^n$ converge vers la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ avec un rayon de convergence R.
Espérons pour l'instant que $R > 0$, on le déterminera plus précisément plus tard.

Démonstration 7
Soit $x \in]-R, R[$. On a :

$$(\mathrm{e}^x - 1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n\right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(m+1-k)!} x^{m+1} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Regardons $\sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k$: pour $m = 0$, $\sum_{k=0}^{0} \binom{1}{k} B_k = B_0 = 1$

pour $m \neq 0$, $\sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k = 0$.

Donc $(\mathrm{e}^x - 1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n\right) = x + 0 = x$. Donc sur $]-R, R[$, $g(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$.

2.4 Polynômes de *Bernoulli*

Théorème 8 Les polynômes de *Bernoulli*

Il existe une unique suite de polynômes $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que : $\begin{cases} A_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ A_n' = nA_{n-1} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^1 A_n(t)\,\mathrm{d}t = 0 \end{cases}$.

Démonstration 8
Par récurrence, l'initialisation étant triviale, montrons que A_n existe et est unique, en supposant la suite construite jusqu'à A_{n-1}.
A_n ayant pour dérivée le polynôme nA_{n-1}, on a : $A_n(x) = n \int_0^x A_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t + C_n$, où C_n est une constante.
Il reste à satisfaire la condition $\int_0^1 A_n(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Leftrightarrow n \int_0^1 \int_0^t A_{n-1}(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t + C_n = 0 \Leftrightarrow C_n = -n \int_0^1 \int_0^t A_{n-1}(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$.
Cette constante étant parfaitement déterminée, le polynôme A_n ainsi construit est unique.

Donnons les premiers polynômes de *Bernoulli* :

$$A_0 = 1$$
$$A_1 = X - \frac{1}{2}$$
$$A_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$$
$$A_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$$
$$A_4 = X^4 - 2X^3 + X^2 - \frac{1}{30}$$
$$A_5 = X^5 - \frac{5}{2}X^4 + \frac{5}{3}X^3 - \frac{1}{6}X$$
$$A_6 = X^6 - 3X^5 + \frac{5}{2}X^4 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{42}$$
$$A_7 = X^7 - \frac{7}{2}X^6 + \frac{7}{2}X^5 - \frac{7}{6}X^3 + \frac{1}{6}X$$

Proposition 9

$$\forall n \geq 2,\ A_n(1) = A_n(0)$$

Démonstration 9
$A_n(1) - A_n(0) = \int_0^1 A_n'(t)\,\mathrm{d}t = n \int_0^1 A_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t = 0$

Proposition 10

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A_n(\mathrm{X}) = (-1)^n A_n(1-\mathrm{X})$$

Démonstration 10
On note $Q_n = (-1)^n A_n(1-\mathrm{X})$.
On peut montrer que $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les trois propriétés qui entrent dans la définition des polynômes de *Bernoulli*.
Comme ils sont uniques, on en déduit : $Q_n = A_n$.

Proposition 11

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ A_{2p+1}(0) = A_{2p+1}(1) = 0$$

Démonstration 11
D'après les deux propositions qui précèdent, on a, pour $p \geq 1$:
$A_{2p+1}(1) = A_{2p+1}(0)$ et $A_{2p+1}(1) = (-1)^{2p+1} A_{2p+1}(0) = -A_{2p+1}(0)$.
On en déduit : $A_{2p+1}(1) = A_{2p+1}(0) = 0$.

Théorème 12 Les nombres de *Bernoulli* apparaissent dans les polynômes de *Bernoulli*
On a la relation suivante entre les nombres et les polynômes : $\forall p \in \mathbb{N},\ B_p = A_p(0)$.
Cela revient à dire qu'on aurait pu introduire les nombres de *Bernoulli* uniquement à l'aide de ces polynômes.

Démonstration 12 Notons $B'_p = A_p(0)$.
La proposition précédente nous donne immédiatement que $B'_{2p+1} = 0$ dès que $p \geq 1$.
Par une récurrence immédiate, on a, pour $n \in \mathbb{N}$: $A_n^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!} A_{n-k}$, car $A_n' = nA_{n-1}$.
On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ A_n^{(k)}(0) = \dfrac{n!}{(n-k)!} B'_{n-k}$.
En regardant le développement de *Taylor* de A_n en 0, on a : $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B'_{n-k} \mathrm{X}^k$.
Du coup, on obtient, pour $p \geq 0$: $B'_{2p} = A_{2p}(0) = A_{2p}(1) = \sum\limits_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} B'_{2p-k} = \sum\limits_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} B'_k = B'_{2p} + \sum\limits_{k=0}^{2p-1} \binom{2p}{k} B'_k$.
Donc $\sum\limits_{k=0}^{2p-1} \binom{2p}{k} B'_k = 0$.
Ainsi les suites $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ répondent aux mêmes relations de récurrence et $B_0 = B'_0$; elles sont égales.

3 À quoi servent-ils ?

3.1 Liens avec la fonction ζ et conséquences

Définition 4 La fonction ζ

On définit ζ telle que pour tout $s \in \mathbb{C}$ de partie réelle strictement supérieure à 1 : $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

Cette fonction peut-être prolongée analytiquement à $\mathbb{C} \backslash \{1\}$ (mais on ne traitera pas ici de la façon dont on la prolonge).

Théorème 13 Lien entre $\zeta(2q)$ et B_{2q}

On dispose d'une formule simple déterminant ζ aux entiers pairs positifs, faisant intervenir les nombres de *Bernoulli*.

En effet, pour tout $q \geq 1$: $\zeta(2q) = \frac{(2\pi)^{2q}}{(-1)^{q-1} \times 2 \times (2q)!} B_{2q}$.

Démonstration 13

On définit la suite $\left(f_q\right)_{q \geq 1}$ par : $\forall x \in [0, 2\pi[$, $f_q(x) = A_{2q}\left(\frac{x}{2\pi}\right)$, f_q étant 2π-périodique.

f_q coïncide avec un polynôme sur $[0, 2\pi[$ donc y est continue.

Et $\lim_{x \to 2\pi^-} f_q(x) = A_{2q}(1) = A_{2q}(0) = f_q(0) = f_q(2\pi)$ donc f_q est continue en 2π.

Par 2π-périodicité, f_q est continue sur $\mathbb{R}$. Par construction, elle est également de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

La série de *Fourier* de f_q converge donc uniformément vers f_q.

Aussi, soit $x \in \mathbb{R}$; $\exists k \in \mathbb{Z}$, $\exists y \in [0, 2\pi[$, $y = x + 2k\pi$.

Ainsi $f_q(x) = f_q(y) = A_{2q}\left(\frac{y}{2\pi}\right) = (-1)^{2q} A_{2q}\left(1 - \frac{y}{2\pi}\right) = f_q(2\pi - y) = f_q(-x)$ donc f_q est paire.

On a donc : $\forall q \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_q(x) = \frac{a_{0,q}}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k,q} \cos(kx)$.

Si $k = 0$, $a_{0,q} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_q(t)\,\mathrm{d}t = 2 \int_0^1 P_{2q}(u)\,\mathrm{d}u = 0$.

Si $q = 1$ et $k \neq 0$:
$$\begin{aligned}
a_{k,1} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_1(t)\, \cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} A_2\left(\frac{t}{2\pi}\right) \cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{4\pi^2} - \frac{t}{2\pi} + \frac{1}{6}\right) \cos(kt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[\left(\frac{t^2}{4\pi^2} - \frac{t}{2\pi} + \frac{1}{6}\right) \frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \left(\frac{t}{2\pi^2} - \frac{1}{2\pi}\right) \frac{\sin(kt)}{k}\,\mathrm{d}t \right\} \\
&= \frac{-1}{\pi^2 k} \int_0^{\pi} \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \sin(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{\pi^2 k} \left\{ \left[\left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \frac{-\cos(kt)}{k} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{-1}{\pi k} \cos(kt)\,\mathrm{d}t \right\} \\
&= \frac{-1}{\pi^2 k} \left\{ \frac{-1}{k} + \frac{1}{\pi k} \int_0^{\pi} \cos(kt)\,\mathrm{d}t \right\} = \frac{1}{\pi^2 k^2} - \frac{1}{\pi^3 k^2} \left[\frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi^2 k^2}
\end{aligned}$$

$$\text{Si } q \neq 1 \text{ et } k \neq 0 : a_{k,q} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_{2q}(t)\,\cos(kt)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 A_{2q}(u)\,\cos(2\pi k u)\,\mathrm{d}u$$
$$= 2\left\{\left[A_{2q}(u)\frac{\sin(2\pi k u)}{2\pi k}\right]_0^1 - \int_0^1 2q A_{2q-1}(u)\frac{\sin(2\pi k u)}{2\pi k}\,\mathrm{d}u\right\}$$
$$= -2\frac{2q}{2\pi k}\int_0^1 A_{2q-1}(u)\,\sin(2\pi k u)\,\mathrm{d}u$$
$$= -2\frac{2q}{2\pi k}\left\{\left[A_{2q-1}(u)\frac{-\cos(2\pi k u)}{2\pi k}\right]_0^1 - \int_0^1 (2q-1)A_{2q-2}(u)\frac{-\cos(2\pi k u)}{2\pi k}\mathrm{d}u\right\}$$
$$= -2\frac{(2q)(2q-1)}{(2\pi k)^2}\int_0^1 A_{2q-2}(u)\,\cos(2\pi k u)\,\mathrm{d}u \quad \text{car } A_{2q-1}(1) = A_{2q-1}(0)$$
$$= -\frac{(2q)(2q-1)}{(2\pi k)^2}a_{k,q-1} = (\dots) = (-1)^{q-1}\frac{(2q)\times(2q-1)\times\dots\times 4\times 3}{(2\pi k)^{2q-2}}a_{k,1}$$
$$= (-1)^{q-1}\,2\,\frac{(2q)!}{(2\pi k)^{2q}}$$

Donc $f_q(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (-1)^{q-1}\,2\,\frac{(2q)!}{(2\pi k)^{2q}}\cos(kx)$.

En particulier, $f_q(0) = \frac{(-1)^{q-1}\,2\,(2q)!}{(2\pi)^{2q}}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2q}}$ donc $B_{2q} = \frac{(-1)^{q-1}\,2\,(2q)!}{(2\pi)^{2q}}\zeta(2q)$, d'où $\zeta(2q) = \frac{(2\pi)^{2q}}{(-1)^{q-1}\,2\,(2q)!}B_{2q}$.

Proposition 14 Signe des nombres de *Bernoulli* de rang pair
Soit $q \geq 1$. Si q est impair, alors B_{2q} est positif. Au contraire, si q est pair, alors B_{2q} est négatif.

Démonstration 14
On a vu la formule $B_{2q} = \frac{(-1)^{q-1}\,2\,(2q)!}{(2\pi)^{2q}}\zeta(2q)$ dans la démonstration précédente, et pour $s > 1$, $\zeta(s)$ est clairement positif.

Théorème 15 Équivalent en l'infini de $|B_{2q}|$
En l'infini, on a l'équivalent suivant : $|B_{2q}| \sim 4\sqrt{\pi q}\left(\frac{q}{\pi \mathrm{e}}\right)^{2q}$.

Démonstration 15
On a : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ est une série normalement (donc uniformément) convergente sur $[2, +\infty[$.
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{n^x} = 0$ pour $n \geq 2$ (et 1 pour $n = 1$), on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\zeta(x) = 1$.
Donc, par la formule précédente et par *Stirling* :
$$|B_{2q}| = \frac{2\,(2q)!}{(2\pi)^{2q}}\zeta(2q) \sim \frac{2\,(2q)!}{(2\pi)^{2q}} \sim \frac{2}{(2\pi)^{2q}}\sqrt{4\pi q}\left(\frac{2q}{\mathrm{e}}\right)^{2q} = 4\sqrt{\pi q}\left(\frac{q}{\pi\mathrm{e}}\right)^{2q}$$

Théorème 16 Rayon de convergence de la série génératrice
La série génératrice précédemment définie : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$ a 2π pour rayon de convergence.

Démonstration 16
Comme les termes de rang impair (excepté B_1) sont tous nuls, on a : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n}{n!}x^n = 1 - \frac{x}{2} + \sum\limits_{q=1}^{+\infty}\frac{B_{2q}}{(2q)!}x^{2q}$.

On applique *d'Alembert* à cette dernière série (en prenant $x \neq 0$) :

$$\left|\frac{\frac{B_{2q+2}}{(2q+2)!}x^{2q+2}}{\frac{B_{2q}}{(2q)!}x^{2q}}\right| = \frac{(2q)!}{(2q+2)!}\frac{|B_{2q+2}|}{|B_{2q}|}x^2 \sim \frac{1}{(2q+1)(2q+2)}\frac{4\sqrt{\pi(q+1)}\left(\frac{q+1}{\pi e}\right)^{2q+2}}{4\sqrt{\pi q}\left(\frac{q}{\pi e}\right)^{2q}}x^2 \sim \frac{1}{4q^2}\sqrt{\frac{q+1}{q}}\frac{(q+1)^{2q+2}(\pi e)^{2q}}{q^{2q}(\pi e)^{2q+2}}x^2$$

$$\sim \frac{1}{4q^2}\frac{(q+1)^2}{(\pi e)^2}\left(\frac{q+1}{q}\right)^{2q}x^2 \sim \frac{1}{4\pi^2 e^2}\left(\left(1+\frac{1}{q}\right)^q\right)^2 x^2 \sim \frac{1}{4\pi^2 e^2}e^2 x^2 \sim \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2.$$

Le rayon de convergence est alors clairement 2π.

3.2 Développements en série entière

À partir de la fonction génératrice, $g(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} B_k \frac{x^k}{k!}$, avec un rayon de convergence valant 2π, on peut obtenir le développement en série entière d'autres fonctions.

Proposition 17 Développement en série entière de th **et** tan
Avec un rayon de convergence qui vaut $\dfrac{\pi}{2}$,

$$\text{th}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(2^{4n} - 2^{2n})B_{2n}\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$$

$$\tan(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(2^{4n} - 2^{2n})|B_{2n}|\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$$

Démonstration 17
On a : $x\text{th}(x) = g(4x) - g(2x) + x$.
En effet, $g(4x) - g(2x) + x = x\left(\dfrac{4}{e^{4x}-1} - \dfrac{2}{e^{2x}-1} + 1\right)$.
Or : $\dfrac{1}{e^{4x}-1} = \dfrac{1}{(e^{2x}-1)(e^{2x}+1)}$
On met au même dénominateur :

$$g(4x) - g(2x) + x = x\frac{4 - 2e^{2x} - 2 + e^{4x} - 1}{(e^{2x}-1)(e^{2x}+1)} = x\frac{e^{4x} - 2e^{2x} + 1}{(e^{2x}-1)(e^{2x}+1)} = x\frac{(e^{2x}-1)^2}{(e^{2x}-1)(e^{2x}+1)} = x\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = x\text{th}(x)$$

Cette relation donne directement le développement de th.
A partir de ce développement, on pose $x = iz$ et on a celui de tan.
Les deux rayons de convergence s'obtiennent de la même façon que dans le théorème 16.

Proposition 18
Les nombres de *Bernoulli* permettent d'obtenir d'autres développements en série ...
Par exemple,

$$\frac{1}{\text{sh}\, x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}(2^{2n} - 2)B_{2n}\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}, \text{ pour } 0 < |x| < \pi$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}(2^{2n} - 2)|B_{2n}|\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}, \text{ pour } 0 < |x| < \pi$$

Démonstration 18
Comme précédemment, il s'agit de trouver une relation entre la fonction et la génératrice (on peut regarder la quantité : $2g(x) - g(2x)$), puis de déterminer le rayon de convergence de $\dfrac{x}{\sin x}$ et $\dfrac{x}{\text{sh}\, x}$.

Conclusion

Le titre de ce document attribuait aux nombres de *Bernoulli* l'adjectif "fascinants". Comme vous avez pu le lire tout au long du dossier, ils apparaissent là où on ne les attend pas : le développement en série entière d'une fonction rationnelle faisant intervenir l'exponentielle, une famille de polynômes (qui n'ont a priori rien à voir !), la fonction ζ de *Riemann*...

Pourtant, ils sont apparus très tôt dans leur histoire (bien que non dénommés ainsi) de part leur définition assez simple : ils interviennent, de manière assez étrange à première vue, dans une somme parfaitement banale. Ils obéissent à des propriétés incroyables de régularité (nullité des termes impairs de rang supérieur à 3, alternance du signe des termes de rang pair, dénominateurs aujourd'hui donnés par une formule ...) Non seulement sont-ils fascinants, mais leurs utilités sont nombreuses (ζ, développements en série ...) : il aurait été impossible d'être exhaustif à leur propos.

Encore aujourd'hui, certains problèmes autour des nombres de *Bernoulli* restent ouverts ; citons, en guise d'exemple, la conjecture d'*Agoh-Giuga* (deuxième moitié du XX$^{\text{ème}}$ siècle) :

Un entier p serait premier, si, et seulement si, $pB_{p-1} \equiv -1\ [p]$.

Qui sait quels secrets ces nombres nous réservent-ils encore ?

Références

[1] André JOYAL, Les nombres de Bernoulli, 2003

[2] Gaëtan BISSON, Autour des nombres et des polynomes de Bernoulli, 2003

[3] Gilles COSTANTINI, Polynômes et Nombres de Bernoulli, Applications

[4] Z. I. BOREVITCH et I. R. CHAFAREVITCH, Théorie des nombres, 1967

[5] Filipe CARDOSO, Magali HUBLET, Élise PETIT et Francisco SOARES, À la découverte des nombres de Bernoulli, 2009