

Asymptotique pour le processus de renouvellement.

Meilleure référence papier: Fiabilité des systèmes - Méthodes mathématiques, J.L. Bon,
(cote à la BU: S19.287 BON FIA)

chap 8.2.2
(p. 134 → 138)

Meilleure référence en ligne: Addendum numérique du livre Statistique mathématique en action, V. Rivoirand & G. Stoltz (cote à la BU: S19.5 RIV STA)

↳ <http://www.math.ens.fr/statenaction/PDF/Renouvellements-Principal.pdf>

Théorème:

positives et à densité

Soit $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a.i. de carré intégrable, dont on note m l'espérance et σ^2 la variance.
On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^n T_k$,

et, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $N_t = \max \{n \in \mathbb{N} \mid S_n \leq t\}$.

Alors, on a les résultats asymptotiques suivants sur N_t :

→ Loi des grands nombres: $\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{ps} \frac{1}{m}$

→ Théorème central limite: $\sqrt{\frac{m^3}{t\sigma^2}} \left(\frac{N_t}{t} - \frac{1}{m} \right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Z$ pour Z une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Démonstration:

→ Loi des grands nombres:

Comme $S_n = \sum_{k=1}^n T_k$ et que les T_k , $k \in \mathbb{N}^*$ sont iid et intégrables, on a, par la LGN classique:

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{ps} m.$$

Or, on a: $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $N_t \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t$.

Supposons, par l'absurde, que $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ soit bornée par $n_0 \in \mathbb{N}$.

Alors, on aurait: $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $S_{n_0} > t$, donc $S_{n_0} = +\infty$.

Mais $S_{n_0} = \sum_{k=1}^{n_0} T_k$ est intégrable, donc $S_{n_0} < +\infty$ p.s. Ainsi, on a montré: $N_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{ps} +\infty$.

Par définition de N_t , on a l'encadrement: $S_{N_t} \leq t \leq S_{N_t+1}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\frac{S_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} \leq \frac{S_{N_t+1}}{N_t+1} \cdot \frac{N_t+1}{N_t}$
 $\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{ps} m \quad \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{ps} m \quad \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{ps} 1$ par composition des limites.

Par le théorème des gendarmes, on obtient $\frac{t}{N_t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{ps} m$ d'où $\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{ps} \frac{1}{m}$.

→ Théorème central limite:

Il s'agit de calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la limite (quand $t \rightarrow \infty$) de:

$$\mathbb{P} \left(\sqrt{\frac{m^3}{t\sigma^2}} \left(\frac{N_t}{t} - \frac{1}{m} \right) > x \right) = \mathbb{P} \left(N_t > \frac{t}{m} + x \sqrt{\frac{t\sigma^2}{m^3}} \right) = \mathbb{P} (N_t \geq n_{t,x}),$$

où $n_{t,x}$ est le plus petit entier strictement supérieur à $\frac{t}{m} + x \sqrt{\frac{t\sigma^2}{m^3}}$.

Remarquons que les v.a. S_n , $n \in \mathbb{N}^*$, sont à densité donc leurs fonctions de répartition sont continues.

Ceci n'a rien à voir avec les v.a. à densité, mais on ne fait généralement le T.C. qu'après avoir démontré une LGN.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, Φ_n la fonction de répartition de $\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$; c'est une fonction continue.

Par le TCL classique, la famille $(T_k)_{k \geq 1}$ étant iid et de carré intégrable,

$$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Z \text{ où } Z \sim \mathcal{N}(0,1); \text{ ie } \Phi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{cvs}} \Phi, \text{ où } \Phi \text{ est la fonction de répartition de } Z.$$

Or, $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions croissantes, qui converge simplement vers une fonction Φ continue (car $\mathcal{N}(0,1)$ est une loi à densité).

D'après le 2nd théorème de Dini, on a donc: $\Phi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{cvs}} \Phi$.

$$\text{Or, } \mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{m^3}{t\sigma^2}}\left(\frac{N_t}{t} - \frac{1}{m}\right) > x\right) = \mathbb{P}\left(S_{n_{t,x}} \leq t\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_{n_{t,x}} - n_{t,x}m}{\sigma\sqrt{n_{t,x}}} \leq \frac{t - n_{t,x}m}{\sigma\sqrt{n_{t,x}}}\right) = \Phi_{n_{t,x}}\left(\frac{t - n_{t,x}m}{\sigma\sqrt{n_{t,x}}}\right).$$

Comme :

$$\frac{t}{m} + x\sqrt{\frac{t\sigma^2}{m^3}} < n_{t,x} \leq \frac{t}{m} + x\sqrt{\frac{t\sigma^2}{m^3}} + 1, \text{ on a: } n_{t,x} = \frac{t}{m} + x\sqrt{\frac{t\sigma^2}{m^3}} + o_{t \rightarrow \infty}(\sqrt{t}).$$

$$\text{Et donc: } \left. \begin{array}{l} \frac{t - n_{t,x}m}{\sigma\sqrt{n_{t,x}}} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{-x\sqrt{\frac{t\sigma^2}{m^3}}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{m}}} \\ \frac{t - n_{t,x}m}{\sigma\sqrt{n_{t,x}}} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{-x\sqrt{\frac{t\sigma^2}{m^3}}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{m}}} \end{array} \right\} \frac{t - n_{t,x}m}{\sigma\sqrt{n_{t,x}}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -x$$

Par convergence uniforme, il vient alors: $\Phi_{n_{t,x}}\left(\frac{t - n_{t,x}m}{\sigma\sqrt{n_{t,x}}}\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Phi(-x)$

$$\text{Donc, } \mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{m^3}{t\sigma^2}}\left(\frac{N_t}{t} - \frac{1}{m}\right) > x\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z \leq -x) = \mathbb{P}(Z \geq x) = \mathbb{P}(Z > x)$$

↑ car Z est une v.a à densité.

$$\text{Soit: } \sqrt{\frac{m^3}{t\sigma^2}}\left(\frac{N_t}{t} - \frac{1}{m}\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty}{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Commentaires:

⊗ Démonstration du 2nd théorème de Dini:

on la trouve dans Gourdon Analyse ou Oraux X-ENS Analyse 2.

⊗ Résultat asymptotique supplémentaire: $\frac{\mathbb{E}[N_t]}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{m}$.

C'est plus compliqué à montrer: cela utilise l'identité de Wald (résultat sur les martingales).

⊗ $(T_k)_{k \geq 1}$ pour modéliser la durée de vie de k appareils identiques indépendants.

⊗ Si $T_1 \sim \mathcal{E}(\lambda)$, on parle de processus de Poisson.

⊗ On peut parfois assouplir le modèle en disant que T_1 suit une autre loi (comportement particulier d'un appareil à sa première utilisation).

Aussi, on suppose parfois que le 1^{er} appareil a été installé à un temps $-a < 0$, inconnu.

Si $\bar{F} = 1 - F$ désigne la fonction de survie de T_2 , alors celle de T_1 est:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 > x) &= \mathbb{P}(\text{l'appareil vit plus longtemps que } x+a \mid \text{l'appareil vit plus longtemps que } a) \\ &= \frac{\bar{F}(a+x)}{\bar{F}(a)} \quad (\text{on rappelle que } a \text{ est inconnu}). \end{aligned}$$

Dans ces deux cas, on parle de processus de renouvellement avec retard.

⊗ L'existence d'une densité pour les T_k , $k \in \mathbb{N}^*$, est essentielle pour garantir que la fonction de répartition de S_n ($n \in \mathbb{N}^*$) est continue et appliquer Dini.