

Sous-groupes distingués et caractères

Leçons : 107, 109, 101, 103, 104, 106

[Ulm], partie 17.3
[Pey], partie VIII.1.3

Théorème

Soit G un groupe fini de caractères irréductibles χ_1, \dots, χ_m .
Alors les sous-groupes distingués de G sont les $\bigcap_{j \in J} \text{Ker } \chi_j$, où $J \subset \llbracket 1, m \rrbracket$.

On commence par montrer le lemme qui suit.

Lemme

Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation de G de caractère χ .
Alors $\text{Ker } \chi = \text{Ker } \rho$.

Démonstration du lemme :

Soit $g \in G$, par Lagrange, $\rho(g)$ est d'ordre fini divisant $\#G$, donc est diagonalisable ; on peut même dire que ses valeurs propres, qu'on nomme λ_j , où $j \in \llbracket 1, \dim V \rrbracket$, sont des racines de l'unité et donc de module 1.

On en déduit $\chi(g) = \sum_{i=1}^{\dim V} \lambda_i$, ce qui fournit : $|\chi(g)| \leq \sum_{j=1}^{\dim V} |\lambda_j| = \dim V = \chi(e)$.

Mais le cas d'égalité dans cette inégalité triangulaire est $\lambda_1 = \dots = \lambda_{\dim V}$.
Ainsi : $\chi(g) = \chi(e) \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_{\dim V} = 1 \Leftrightarrow \rho(g) = \text{Id}_V \Leftrightarrow g \in \text{Ker } \rho$. ■

Démonstration du théorème :

Étape 1 : Soit $H \triangleleft G$.

On considère l'action par translation à gauche de G sur G/H dont on note $\varphi : G \rightarrow \mathfrak{S}_{G/H}$ le morphisme structurel.

Soit alors χ le caractère associé à la représentation par permutations $\rho_\varphi : G \rightarrow \text{GL}(V)$, où V est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $\#G/H$.

Le lemme précédent nous donne que : $\text{Ker } \chi = \text{Ker } \rho_\varphi = \text{Ker } \varphi = H$.

Les sous-groupes distingués de G sont donc les noyaux des caractères de G .

Étape 2 : On va exprimer les noyaux des caractères de G en fonction des noyaux des caractères irréductibles de G .

Soit χ un caractère de G , associé à la représentation $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$.

On décompose alors V en somme directe de sous-représentations irréductibles : $V = \bigoplus_{i=1}^s \underbrace{V_i \oplus \dots \oplus V_i}_{a_i \text{ fois}}$

avec V_1, \dots, V_s représentations irréductibles "distinctes" de G , de caractères associés χ_1, \dots, χ_s .

On a alors : $g \in \text{Ker } \chi \Leftrightarrow g \in \text{Ker } \rho \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, g \in \text{Ker } \rho|_{V_i} \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, g \in \text{Ker } \chi_i$.

Donc $\text{Ker } \chi = \bigcap_{i=1}^s \text{Ker } \chi_i$. ■

On va appliquer ce résultat à \mathcal{D}_6 . Commençons par déterminer sa table de caractères.

Étape 1 : On va chercher d'abord tous ses caractères irréductibles de degré 1 ; ce sont les morphismes de groupes de $\mathcal{D}_6 \rightarrow \mathbb{C}^*$.

Nécessairement, si χ est un caractère de degré 1 de \mathcal{D}_6 , on a : $\chi(s)^2 = \chi(e) = 1$ et donc $\chi(s) = \pm 1$.

Mais aussi, $\chi(sr)^2 = 1$ et donc $\chi(s)\chi(r)\chi(s)\chi(r) = 1$, d'où $\chi(r) = \pm 1$.

Il y a donc 4 candidats possibles pour être une représentation parmi ces applications, il resterait à vérifier que ce sont bien des morphismes de groupes de $\mathcal{D}_6 \rightarrow \mathbb{C}^*$.¹

1. Kaa vous suggère d'avoir confiance...

Étape 2 : Les autres caractères de \mathcal{D}_6 sont nécessairement de degré supérieur ou égal à 2.

La relation reliant degrés des caractères irréductibles et cardinal du groupe, $\sum_{i \in I} n_i^2 = \#G$, nous indique qu'il

nous reste à trouver 2 caractères irréductibles de degré 2.

On aura alors la table de \mathcal{D}_6 .

Étape 3 : On pose $\omega = e^{\frac{i\pi}{3}}$, et pour $h \in \{1, 2\}$: $\rho_h(r^k) = \begin{pmatrix} \omega^{hk} & 0 \\ 0 & \omega^{-hk} \end{pmatrix}$ et $\rho_h(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-hk} \\ \omega^{hk} & 0 \end{pmatrix}$.

On devrait vérifier que $\rho_h : \mathcal{D}_6 \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C}^2)$ est bien un morphisme de groupes, ie, une représentation.

On note alors χ_h , pour $h \in \{1, 2\}$, le caractère de ρ_h .

$$\begin{aligned} \text{On a : } \#\mathcal{D}_6 \langle \chi_h, \chi_h \rangle &= \sum_{k=0}^5 \left(\chi_h(r^k)^2 + \chi_h(sr^k)^2 \right) = \sum_{k=0}^5 \left(\omega^{2hk} + \omega^{-2hk} \right) = \sum_{k=0}^5 \omega^{2hk} + 2 \times 6 + \sum_{k=0}^5 \omega^{-2hk} \\ &= 12 + 4(1 + j + j^2) = 12. \end{aligned}$$

Donc χ_1 et χ_2 sont bien irréductibles.

Voici la table des caractères irréductibles de \mathcal{D}_6 .

	r^k	sr^k
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1
ψ_3	$(-1)^k$	$(-1)^k$
ψ_4	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$
χ_1	$2 \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)$	0
χ_2	$2 \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$	0

Les sous-groupes distingués de \mathcal{D}_6 sont donc : \mathcal{D}_6 , $\langle r \rangle$, $\langle s, r^2 \rangle$, $\langle sr, r^2 \rangle$, $\{e\}$, $\langle r^3 \rangle$ et $\langle r^2 \rangle$ (intersection des noyaux de ψ_2 et ψ_3).

Références

[Ulm] F. ULMER – *Théorie des groupes*, Ellipses, 2012.

[Pey] G. PEYRÉ – *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*, Ellipses, 2004.