

Ellipsoïde de John-Loewner¹

Leçons : 152, 160, 170, 171, 158, 181, 203, 219, 229, 253

[X-ENS A13], exercice 3.37

Théorème

Soit K un compact d'intérieur non-vidé de \mathbb{R}^n .
Il existe un unique ellipsoïde centré en 0, de volume minimal, contenant K .

Notations : Q (resp. Q^+ , Q^{++}) désigne l'ensemble des formes quadratiques (resp. positives, définies positives) de \mathbb{R}^n . Si $q \in Q$, on désigne par $D(q)$ le déterminant d'une matrice de q dans une base orthonormale (on montrera dans le lemme 1 que $D(q)$ ne dépend pas de la base orthonormale choisie).

Démonstration :

On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne usuelle.

Un ellipsoïde centré en 0 de \mathbb{R}^n a une équation du type $q(x) \leq 1$, où $q \in Q^{++}$, et on pose alors :

$$\mathcal{E}_q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \leq 1\}$$

Lemme 1

Le volume de \mathcal{E}_q est $V_q = \frac{V_0}{\sqrt{D(q)}}$, où V_0 désigne le volume de la boule unité pour la norme euclidienne canonique.

Démonstration du lemme 1 :

Il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ dans laquelle q s'écrit $q(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$, avec tous les

$a_i > 0$, car $q \in Q^{++}$.

Ainsi : $V_q = \int \dots \int_{\sum_{i=1}^n a_i x_i^2 \leq 1} dx_1 \dots dx_n$.

Le changement de variables défini par $x_i = \frac{t_i}{\sqrt{a_i}}$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de jacobien $\frac{1}{\sqrt{a_1 \dots a_n}}$.

Dès lors : $V_q = \int \dots \int_{\sum_{i=1}^n t_i^2 \leq 1} \frac{dt_1 \dots dt_n}{\sqrt{a_1 \dots a_n}}$.

Soit S la matrice de q dans une base orthonormale de \mathbb{R}^n quelconque.

$S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donc $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), S = P \text{diag}(a_1, \dots, a_n) {}^t P$, d'où $\det S = a_1 \dots a_n$.

Donc $D(q) = a_1 \dots a_n$ est indépendant de la base orthonormale choisie et $V_q = \frac{V_0}{\sqrt{D(q)}}$. ■

1. Comme d'habitude, il faut savoir déterminer cet ellipsoïde sur quelques exemples : triangle équilatéral centré en l'origine, carré dont un des sommets est l'origine... Et il faut également savoir dire quelques mots sur son utilité. Je vous propose ici de démontrer le résultat du développement sur les sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$ (voir en page ??).

On désigne par \mathcal{B} la boule unité de \mathbb{R}^n , muni du produit scalaire usuel. Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$, on pose $K = \bigcup_{A \in G} A(\mathcal{B})$ et on définit $\varphi : \begin{cases} G \times \mathcal{B} & \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (A, x) & \mapsto Ax \end{cases}$ de sorte que $K = \text{Im } \varphi$.

Comme G est compact et \mathcal{B} aussi (on est en dimension finie!), $G \times \mathcal{B}$ est compact, et par continuité de φ , K aussi. De plus, $0 \in \mathcal{B} \subset K \Rightarrow 0 \in \overset{\circ}{K}$; par le théorème de John-Loewner, il existe une unique matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, telle que $K \subset \mathcal{E}_{q_S}$, où \mathcal{E}_{q_S} est de volume minimal et $q_S : x \mapsto {}^t x S x$.

On va montrer que $G \subset \mathcal{O}(S) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t M S M = S\}$. Soit $M \in G$. Soit $y = Ax \in K$, avec $x \in \mathcal{B}$; alors $y = \underbrace{M M^{-1}}_{\in K} Ax$, donc $K \subset M(K)$. Réciproquement, si $x \in M(K)$, alors $x = M A y$, avec $A \in G$ et $y \in \mathcal{B}$; comme $MA \in G$, on a

$x \in K$, d'où $K = M(K)$. G étant compact, les suites $(M^p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(M^{-p})_{p \in \mathbb{N}}$ sont bornées; on en déduit alors que $|\det M| = 1$.

Posons $R = {}^t M S M$; alors $R \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, car ${}^t x R x = {}^t (Mx) S (Mx) > 0$ dès que $Mx \neq 0$ (ie $x \neq 0$), vu que $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Aussi, si $x \in K$, alors ${}^t x R x = {}^t (Mx) S (Mx) \leq 1$, car $Mx \in M(K) = K \subset \mathcal{E}_{q_S}$. Mais comme $|\det M| = 1$, on a : $\det R = \det S$, d'où : $V_{q_S} = V_{q_R}$. Par unicité, on a donc $R = S$ et ${}^t M S M = S$, c'est-à-dire $M \in \mathcal{O}(S)$.

2. On peut se demander si le volume est ainsi bien défini. En effet, il semble dépendre du choix de la base orthonormée choisie. Mais il n'en est rien. Si on change de base orthonormale, alors la matrice de passage est une matrice orthogonale. Le jacobien du changement de variables vaut alors 1, et donc le volume ne dépend finalement pas de la base orthonormée choisie !

On reformule alors le problème : montrons qu'il existe un unique $q \in Q^{++}$, tel que $D(q)$ soit maximal et tel que $\forall x \in K, q(x) \leq 1$.

On munit Q de la norme $N : q \mapsto \sup_{\|x\| \leq 1} |q(x)|$ et on pose $\mathcal{A} = \{q \in Q^+ | \forall x \in K, q(x) \leq 1\}$; on va chercher

à maximiser $D(q)$ sur \mathcal{A} .

Montrons que \mathcal{A} est un compact convexe non-vide de Q .

\mathcal{A} est convexe : soient $q, q' \in \mathcal{A}, \lambda \in [0, 1]$;

D'une part : $\forall x \in \mathbb{R}^n, (\lambda q + (1 - \lambda)q')(x) = \lambda q(x) + (1 - \lambda)q'(x) \geq 0$.

Et d'autre part : $\forall x \in K, (\lambda q + (1 - \lambda)q')(x) \leq \lambda + (1 - \lambda) = 1$.

Donc $\lambda q + (1 - \lambda)q' \in \mathcal{A}$.

\mathcal{A} est fermé : soit $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans \mathcal{A} qui converge vers q dans (Q, N) .

Alors $\forall x \in \mathbb{R}^n, |q(x) - q_n(x)| \leq N(q - q_n) \|x\|^2$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n(x) = q(x)$.

Conséquemment, $\forall x \in \mathbb{R}^n, q(x) \geq 0$ et $\forall x \in K, q(x) \leq 1$ et donc $q \in \mathcal{A}$.

\mathcal{A} est borné : soit $q \in \mathcal{A}$.

K est d'intérieur non-vide donc $\exists a \in K, \exists r > 0, \mathcal{B}(a, r) \subset K$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, si $\|x\| \leq r$, alors $a + x \in K$ donc $q(a + x) \leq 1$.

D'autre part $q(-a) = q(a) \leq 1$ et par l'inégalité de Minkowski³ :

$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{q(x + a - a)} \leq \sqrt{q(x + a)} + \sqrt{q(-a)} \leq 2 \text{ donc } q(x) \leq 4$$

Maintenant, si $\|x\| \leq 1, q(x) = \frac{1}{r^2} q(rx) \leq \frac{4}{r^2}$ et donc $N(q) \leq \frac{4}{r^2}$.

\mathcal{A} est non-vide : comme K est compact, $\exists M > 0, \forall x \in K, \|x\| \leq M$.

Alors $q : x \mapsto \frac{\|x\|^2}{M^2}$ est dans \mathcal{A} .

Comme \det est continue, $q \mapsto D(q)$ est continue sur \mathcal{A} , qui est compact.

Donc D atteint son maximum sur \mathcal{A} en un point noté q_0 .

Et comme $\left(x \mapsto \frac{\|x\|^2}{M^2}\right) \in \mathcal{A}$ et est définie positive, on a : $D(q_0) > 0$, ie $q_0 \in Q^{++}$.

Il existe donc un ellipsoïde \mathcal{E}_{q_0} de volume minimal contenant K ; reste à montrer qu'il est unique, c'est-à-dire, montrer que q_0 est unique.

Lemme 2 (Stricte convexité logarithmique du déterminant)

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ vérifiant $\alpha + \beta = 1$.

Alors $\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$.

Et si $A \neq B$, l'inégalité est stricte.⁴

Démonstration du lemme 2 :

Comme $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, par pseudo-réduction simultanée⁵ :

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{R}), A = {}^t P P \text{ et } B = {}^t P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P$$

On note $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

3. On part de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\varphi(x, y)^2 \leq q(x)q(y)$.

Ainsi $\frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2} \leq \sqrt{q(x)q(y)}$ donc $q(x+y) \leq q(x) + 2\sqrt{q(x)q(y)} + q(y)$, d'où : $\sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$.

4. On ne démontrera le lemme 2 que dans les leçons ayant trait à la convexité des fonctions : 229 et 253 ; dans les autres, on démontrera plutôt le lemme 1.

5. Matriciellement, le théorème spectral dit que si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale. Mais comme $P^{-1} = {}^t P$, cela signifie également que A et D sont congruentes. Aussi, on peut dire que, dans la base de \mathbb{R}^n définie par les colonnes de P , la matrice de la forme quadratique $q_A : X \mapsto {}^t X A X$ est diagonale. Cette nouvelle base est donc à la fois orthonormée pour le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n et orthogonale pour q_A . Ce fait se généralise en le théorème qui suit.

Théorème (Pseudo-réduction simultanée)

- Si q et q' sont deux formes quadratiques sur un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension finie, et si q est définie positive, Alors, il existe une base de E orthonormée pour q et orthogonale pour q' .
- Si $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et si A est définie positive, Alors, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que : ${}^t P A P = I_n$ et ${}^t P B P$ est diagonale.

Et comme $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i > 0$.⁶

Ainsi : $(\det A)^\alpha (\det B)^\beta = (\det P)^{2\alpha} (\det P)^{2\beta} (\det D)^\beta = (\det P)^2 (\det D)^\beta$.

Et $\det(\alpha A + \beta B) = (\det P)^2 \det(\alpha I_n + \beta D)$.

On veut alors montrer que :

$$\det(\alpha I_n + \beta D) \geq (\det D)^\beta \Leftrightarrow \prod_{i=1}^n (\alpha + \beta \lambda_i) \geq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^\beta \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \ln(\alpha + \beta \lambda_i) \geq \beta \sum_{i=1}^n \ln \lambda_i$$

Or, par concavité du logarithme : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\ln(\alpha + \beta \lambda_i) \geq \alpha \ln(1) + \beta \ln(\lambda_i) = \beta \ln(\lambda_i)$.

On obtient le résultat souhaité en sommant sur $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Et si $A \neq B$, un des λ_i est différent de 1, et donc, par stricte convexité du logarithme, on obtient une inégalité stricte. ■

Par l'absurde, soit $q \in \mathcal{A} \setminus \{q_0\}$, tel que $D(q) = D(q_0)$.

Soient S et S_0 les matrices de q et q_0 dans la base canonique de \mathbb{R}^n .

Comme \mathcal{A} est convexe, $\frac{1}{2}(q + q_0) \in \mathcal{A}$, et par stricte convexité logarithmique du déterminant sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$:

$$D\left(\frac{1}{2}(q + q_0)\right) = \det\left(\frac{1}{2}(S + S_0)\right) > (\det S)^{\frac{1}{2}} (\det S_0)^{\frac{1}{2}} = \det S_0 = D(Q_0)$$

Ce qui contredit la maximalité de q_0 . D'où l'unicité. ■

Références

[X-ENS A13] S. FRANCINO, H. GIANELLA et S. NICOLAS – *Oraux X-ENS Algèbre 3*, Cassini, 2010.

6. Alors là, je dis attention ! Contrairement à ce que peut laisser penser la notation, les λ_i NE SONT PAS les valeurs propres de B . En effet, on n'a pas diagonalisé la matrice B , puisque P est dans $GL_n(\mathbb{R})$ et pas dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Et à vrai dire, P ne peut pas être dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ à partir du moment où $A \neq I_n$, vu que $A = {}^t P P$. Pour montrer que les λ_i sont tous positifs, il suffit de supposer, par exemple, que λ_r soit négatif ou nul. Alors on prend $X = P^{-1} e_r \in \mathbb{R}^n$ et ${}^t X B X = \lambda_r \leq 0$ ce qui contredit le fait que $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Et vous ne pourrez pas dire qu'on ne vous avait pas prévenu.