E et F sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, U est un ouvert de E, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non-réduit à un singleton.

I FORMULES DE TAYLOR

On prendra ici une fonction $f : U \to F$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, a et h tels que $[a, a+h] \subset U$, quand cela aura du sens, on posera :

- $P_n(f,a)(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^k f(a) . \underbrace{(h, \dots, h)}_{k \text{ fois}}$: le polynôme de Taylor de f en a à l'ordre n.
- $R_n(f,a)(h) = f(a+h) - P_n(f,a)(h)$.

Prop 1 :
f est une fonction polynomiale $\Leftrightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall a \in U, R_n(f,a) \equiv 0$

Thm 2 : Formule de Taylor avec Reste intégral ([Car], thm 5.6.1)
Soit $f : U \to F$ de classe C^{n+1} sur U ; on suppose $[a, a+h] \subset U$
Alors $R_n(f,a)(h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} D^{n+1} f(a+th) . \underbrace{(h, \dots, h)}_{(n+1) \text{ fois}} \, dt$

Prop 3 : Égalité de Taylor-Lagrange ([G-An], 2.1.3)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^n sur $[a,b]$ et telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a,b[$.
Alors $\exists c \in]a,b[$, $R_n(f,a)(b-a) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$.

Thm 4 : Inégalité de Taylor-Lagrange ([Car], thm 5.6.2)
Soit $f : U \to F$ (n+1) fois différentiable sur U, on suppose $[a, a+h] \subset U$,
Alors $\|R_n(f,a)(h)\| \leq \frac{\|h\|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [0,1]} \|D^{n+1} f(a+th)\|$.

Thm 5 : Formule de Taylor-Young ([Car], thm 5.6.3)
Soit $f : U \to F$ n fois différentiable en a, on suppose $[a, a+h] \subset U$,
Alors $\|R_n(f,a)(h)\| = o(\|h\|^n)$.

II APPLICATIONS EN ANALYSE

1 Développements limités

Déf 6 : ([G-An], 2.2.3)
Soit $f : I \to F$ et $x \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On dit que f admet un développement limité d'ordre n (DL_n) au voisinage de x s'il existe $a_0, a_1, \dots, a_n \in E$ tels que :
$$f(x+h) = a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + o(h^n)$$
Ce développement limité est alors unique.

Rq 7 : ([G-An], 2.2.3)
Par Taylor-Young, si f est n fois dérivable en x,
Alors f admet un DL_n en x : $f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + o(h^n)$.

Ex 8 : ([G-An], 2.2.5)
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ $(n \in \mathbb{N})$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Prop 9 : ([G-An], 2.2.3)
Si $f : I \to F$ admet un DL_n $(n \geq 1)$ au voisinage de $x \in I$:
$$f(x+h) = a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + o(h^n)$$
Alors $f(x) = a_0$, f est dérivable en x, $f'(x) = a_1$.

C-Ex 10 : ([G-An], 2.2.3)
Si f admet un DL_n $(n \geq 2)$ en 0, $f''(0)$ n'existe pas forcément !
Regarder $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto 1 + x + x^2 + x^3 \sin(1/x^2)$ prolongée en 0 par $f(0) = 1$.
f n'est pas deux fois dérivable en 0,
Pourtant, $f(h) = 1 + h + h^2 + o(h^2)$.

2 Séries entières

Prop 11 : ([G-An], 4.4.2)
Si $f : I \to F$ est développable en série entière autour de $x \in \mathring{I}$, avec un rayon de convergence $R > 0$,
Alors $\forall h \in]-R, R[$, $f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} h^n$.

Ex 12 : ([Hau], 13.17)
Soit $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$. f est C^∞ mais ne coïncide pas avec sa série de Taylor en 0.
Donc f n'est pas développable en série entière autour de 0.

Thm 13 : Bernstein ([G-An], exo 4.4.8)
Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f :]-a,a[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞.
On suppose que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-a,a[$, $f^{(2k)}(x) \geq 0$.
Alors f est développable en série entière sur $]-a,a[$.

Ex 14 : ([G-An], exo 4.4.8)
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ et $x \mapsto \tan x$ sont développables en série entière sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Thm 15: Borel ([ZQ], VIII.IV.4.b)

Pour toute suite (a_k) de F et tout $x_0 \in \mathbb{R}$,
Il existe $f : \mathbb{R} \to F$ de classe C^∞ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = f^{(k)}(x_0)$.

Cor 16:

Toute série entière de rayon $R>0$ est le développement de Taylor d'une fonction f de classe C^∞.

3 D'autres conséquences des formules de Taylor

Thm 17: Darboux ([XENS-An1], exo 4.22)

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable,
Alors $f'(I)$ est un intervalle. (On rappelle que I est un intervalle)

Rq 18: Ce résultat nécessite le théorème des accroissements finis, qu'on obtient en prenant $n=0$ dans l'égalité de Taylor-Lagrange (prop. 3)

Thm 19: Inégalités de Kolmogorov ([XENS-An1], exo 4.36)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^n.
Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on pose : $M_k := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$.
On suppose que M_0 et M_n sont finis.
Alors $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $M_k \leq 2^{k(n-k)/2} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}$.

III APPLICATIONS EN ANALYSE NUMÉRIQUE.

1 Suites récurrentes ([Rou], exos 48-49)

Prop 20: Points fixes attractifs

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur I ouvert et soit $a \in I$ tel que $f(a)=a$.

- Si $|f'(a)|<1$, alors il existe $h>0$ tel que $J=[a-h,a+h]$ soit stable par f.
  Soit $x_0 \in J$; par récurrence, on définit $x_{n+1} = f(x_n) \in J$ et alors $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$
  1) Supposons que f' ne s'annule pas sur J,
     Alors $x_0 \neq a \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq a$ et $x_{n+1} - a \underset{n\to\infty}{\sim} f'(a)(x_n - a)$.
  2) Supposons désormais que f est C^2, $f'(a)=0$ et f'' ne s'annule pas sur J.
     Alors $x_0 \neq a \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq a$ et $x_{n+1} - a \underset{n\to\infty}{\sim} f''(a)(x_n-a)^2$.
- Si $|f'(a)|>1$,
  Alors il existe $h>0$, tel que $J := [a-h, a+h] \subset I$
  Et pour $x_0 \in J\setminus\{a\}$, tant qu'on peut, on pose $x_{n+1} = f(x_n)$.
  Dans ce cas, la suite récurrente (x_n) sort de J.

Ex 21:

Le nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est solution de $\varphi^2 = \varphi + 1$.
φ est le point fixe de $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ sur l'intervalle stable $J = [0,+\infty[$
(il n'est pas nécessaire que J soit centré en φ)
On a alors : $\varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}$. La convergence est d'ordre 1.

Thm 22: Méthode de Newton

DÉVELOPPEMENT N°1

Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2.
On suppose $c<d$, $f(c)<0<f(d)$ et $f'>0$ sur $[c,d]$.
Soit $a \in]c,d[$, tel que $f(a)=0$, on note $C = \frac{\max|f''|}{2\min|f'|} > 0$.
Pour $x_0 \in [c,d]$, on pose, tant qu'on peut : $x_{n+1} = F(x_n)$ où $F : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

1) Si $|x_0 - a| \leq \alpha < \frac{1}{C}$, alors (x_n) est bien définie, $|x_n - a| \leq \alpha$ pour tout n,
   Et (x_n) converge vers a à vitesse quadratique (= ordre 2)
2) Si $f''>0$ sur $[c,d]$ et $x_0 > a$,
   Alors (x_n) est bien définie, $x_n > a$ pour tout n,
   Et on a l'équivalent : $x_{n+1} - a \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n-a)^2$.

Ex 23:

Reprenons l'exemple du nombre d'or.
La méthode de Newton amène à chercher le point fixe de la fonction :
$F : x \mapsto x - \frac{x^2-x-1}{2x-1} = \frac{x^2+1}{2x-1}$. La convergence est d'ordre 2.

2 Intégration numérique ([Dem], III.1-2)

Soit $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ une fonction continue; on veut approcher $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.
On subdivise $[\alpha,\beta]$ en : $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k = \beta$.
Et on réalise l'approximation : $\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\,dx \approx (\alpha_{i+1}-\alpha_i)\sum_{j=0}^{\ell_i} \omega_{ij} f(\xi_{ij})$, où
$\xi_{ij} \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ $(0 \leq j \leq \ell_i)$, et $\sum_{j=0}^{\ell_i} \omega_{ij} = 1$.
On note $S(f) = \sum_{i=0}^{k-1}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)\sum_{j=0}^{\ell_i}\omega_{ij} f(\xi_{ij})$ et $E(f) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx - S(f)$.

Déf 24:

On dit qu'une méthode est d'ordre $N \in \mathbb{N}$, si la formule approchée est exacte pour toute fonction polynomiale de degré $\leq N$ et inexacte pour au moins une fonction polynomiale de degré $N+1$.

Thm 25: Noyau de Peano.

Si la méthode est d'ordre N et si $f \in \mathcal{C}^{N+1}([\alpha,\beta])$.
Alors $E(f) = \frac{1}{N!}\int_\alpha^\beta K_N(t) f^{(N+1)}(t)\,dt$ où $K_N(t) = E(x \mapsto ((x-t)_+)^N)$

Méthode	Condition	$S(f)$	Ordre	Majoration $\lvert E(f)\rvert$
Point milieu	f C^2	$\sum (x_{i+1}-x_i) f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)$	1	$\frac{\beta-\alpha}{24} h^2 \lVert f''\rVert_\infty$
Trapèzes	f C^2	$\sum (x_{i+1}-x_i)\frac{1}{2}\left(f(x_i)+f(x_{i+1})\right)$	1	$\frac{\beta-\alpha}{12} h^2 \lVert f''\rVert_\infty$
Simpson	f C^4	$\sum (x_{i+1}-x_i)\left(\frac{1}{6}f(x_i)+\frac{2}{3}f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+\frac{1}{6}f(x_{i+1})\right)$	3	$\frac{\beta-\alpha}{2880} h^4 \lVert f^{(4)}\rVert_\infty$

où $h = \max_i |x_{i+1}-x_i|$ désigne le pas de la subdivision.

IV APPLICATIONS EN GÉOMÉTRIE

1 Convexité & Extréma

Déf 26: ([Rou], exo 42)
Soit U un ouvert convexe de E.
$f : U \to \mathbb{R}$ est convexe $\Leftrightarrow \forall x,y \in U, \forall t \in [0,1], f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x)+tf(y)$.

Rq 27: ([Rou], exo 42)
Si f est différentiable sur U, f est convexe $\Leftrightarrow \forall x,y\in U, f(y)-f(x) \geq Df(x)(y-x)$

Prop 28: ([Rou], exo 108)
Soit U ouvert convexe de E, et $f : U \to \mathbb{R}$, deux fois différentiable sur U.
Alors f est convexe sur $U \Leftrightarrow D^2f$ est une forme quadratique positive en tout point, ie : $\forall x \in U, \forall h \in E, \ D^2f(x).(h,h) \geq 0$.

Thm 29: ([Rou], thm 7.1)
Soit U ouvert de E, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$.
1) Si f admet en a un extremum local et si $Df(a)$ existe
Alors a est un point critique de f, ie $Df(a)=0$.
2) Si f admet en a un minimum local et si $D^2f(a)$ existe
Alors $Df(a)=0$ et $D^2f(a)$ est une forme quadratique positive.
3) Si $Df(a)=0$ et si $D^2f(a)$ est une forme quadratique définie positive, ie: $\forall h \in E\setminus\{0\}, \ D^2f(a).(h,h)>0$
Alors f admet en a un minimum local strict.

C-Ex 30: ([Rou], thm 7.1)
On n'a pas la réciproque:
pour 1) et 2) : $f : x \mapsto x^3$ n'admet pas d'extrémum en 0.
pour 3) : $g : x \mapsto x^4$ vérifie $g''(0)=0$.

2 Étude affine locale d'une courbe plane

Thm 31: ([Rou], exo 104)
Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ de classe C^∞, $t_0 \in \mathring{I}$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ minimal tel que $\gamma^{(p)}(t_0) \neq 0$ et soit $q>p$ minimal tel que $\gamma^{(q)}(t_0)$ ne soit pas colinéaire à $\gamma^{(p)}(t_0)$.
Alors la parité de p et q fournit l'aspect local de l'arc défini par γ au voisinage du paramètre t_0. (cf Annexe)

3 Lemme de Morse

Lem 32: ([Rou], exo 114)
Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec $0 \in U$; soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^3.
On suppose que $Df(0)=0$ et que $D^2f(0)$ est non-dégénérée, de signature $(p, n-p)$.
Alors il existe un C^1-difféomorphisme φ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, tel que $\varphi(0)=0$ et
$f(x)-f(0) = u_1^2+\dots+u_p^2-u_{p+1}^2-\dots-u_n^2$, où $u=\varphi(x)$.

DÉVELOPPEMENT N°2

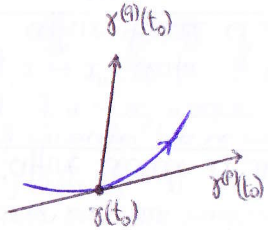
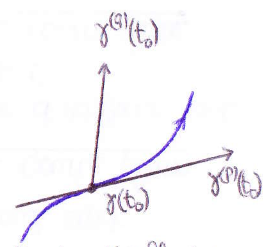
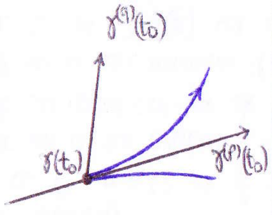
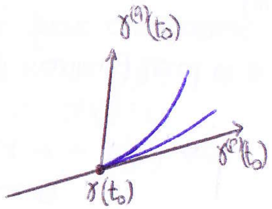
V APPLICATIONS EN PROBABILITÉS

Prop 33: ([Ouv2], lem 14.21)
Soit X une variable aléatoire réelle, φ_X sa fonction caractéristique.
Si X admet un moment d'ordre 2,
Alors on a: $\varphi_X(t) = 1 + it\,\mathbb{E}[X] - \frac{t^2}{2}\mathbb{E}[X^2] + o(t^2)$.
Plus précisément, on a l'inégalité:
$\forall t \in \mathbb{R}, \ \left|\varphi_X(t) - \left(1+it\,\mathbb{E}[X]-\frac{t^2}{2}\mathbb{E}[X^2]\right)\right| \leq t^2\,\mathbb{E}\left[\min\left\{X^2, |t|\frac{|X|^3}{6}\right\}\right]$.

Thm 34: Central limite ([Ouv2], thm 14.22)
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de vecteurs aléatoires iid, définis sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, admettant un moment d'ordre deux.
On note K leur matrice de covariance.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mathbb{E}[X_j])$.
Alors $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_{\mathbb{R}^d}(0,K)$

[Car]: H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, 1997
[G-An]: X. Gourdon, Les maths en tête : Analyse, Ellipses, 2e éd.
[Hau]: B. Hauchecorne, Les contre-exemples en mathématiques, Ellipses, 2e éd.
[ZQ]: H. Queffélec - C. Zuily, Analyse pour l'agrégation, Dunod, 4e éd.
[X-ENS An1]: S. Francinou - H. Gianella - S. Nicolas, Oraux X-ENS Analyse 1, Cassini, 2003.
[Rou]: F. Rouvière, Petit guide de calcul différentiel, Cassini, 3e éd.
[Dem]: JP. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles, EDP Sciences, 3e éd.
[Ouv2]: JY. Ouvrard, Probabilités 2, Cassini, 3e éd.

Annexe : Étude affine locale d'une courbe plane.

	q pair	q impair
p impair	 Point ordinaire	 Point d'inflexion
p pair	 Rebroussement 1e espèce	 Rebroussement 2e espèce