246 — SÉRIES DE FOURIER. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

I DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

1 Coefficients et Séries de Fourier

Déf 1:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite T-périodique (où $T>0$)
$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$

Rq 2:
Si f est T-périodique, alors $g : x \mapsto f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ est 2π-périodique.
Sauf mention contraire, les fonctions considérées seront 2π-périodiques.

Déf 3:
On note $\mathcal{P}_N$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré $\leq N$, c'est-à-dire, l'ensemble des fonctions $x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$, où $c_n \in \mathbb{C}$. On note $\mathcal{P} = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_N$.
On appelle série trigonométrique une série de fonctions de la variable réelle x de la forme $c_0 + \sum_{n\geq 1} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$.
On la note $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$.

Déf 4: Coefficients de Fourier complexes
Si $f \in L^1$, pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose : $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$
On appelle série de Fourier associée à f la série trigonométrique : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{inx}$, de somme partielle $S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{inx}$.

Rq 5: Coefficients de Fourier réels.
Pour $f \in L^1$, $n \in \mathbb{N}$, on pose également :
$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \cos nt\, dt$
$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \sin nt\, dt$
La série de Fourier associée est : $\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geq 1} (a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx)$
On a les relations :
$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$.

Notation 6:
Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $e_n : x \mapsto e^{inx}$.

Prop 7:
Soit $P = \sum_{n=-N}^{N} a_n e_n \in \mathcal{P}$; alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(P) = a_n$.

Prop 8:
Si f est paire (resp. impaire)
Alors les coefficients $b_n(f)$ (resp. $a_n(f)$) sont tous nuls.

Ex 9:
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique égale à $1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$.
Alors $a_0(f) = \frac{4}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n(f) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 4}{n^2\pi^2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) = 0$.

2 Opérations sur les coefficients de Fourier

Prop 10:
Soit $f \in L^1$, $a \in \mathbb{R}$, $k, n \in \mathbb{Z}$.
Alors :
1) $c_n(t \mapsto f(-t)) = c_{-n}(f)$
2) $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$
3) $c_n(t \mapsto f(t+a)) = e^{ina} \cdot c_n(f)$
4) $c_n(e_k \cdot f) = c_{n-k}(f)$.

Prop 11:
- Si f est continue et C^1 par morceaux,
  Alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f') = in \cdot c_n(f)$
- En itérant : si est C^{k-1} et C^k par morceaux,
  Alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$.

Thm 12: Riemann-Lebesgue
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a<b$; $f \in L^1([a,b])$ non-nécessairement périodique.
Alors $\lim_{|\lambda| \to \infty} \int_a^b f(t)\, e^{i\lambda t}\, dt = 0$.

Cor 13:
Si f est C^{k-1} et C^k par morceaux
Alors $c_n(f) = o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$.

Déf 14:
Soient $f, g \in L^1$, pour presque tout $x \in [0, 2\pi]$, on définit : $(f*g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)\, g(t)\, dt$, le produit de convolution de f et g en x.

Prop 15:
Soit $f \in L^1$, $g \in L^1$ et $n \in \mathbb{Z}$.
On a : 1) $f * e_n = c_n(f)\, e_n$
2) $c_n(f*g) = c_n(f)\, c_n(g)$.

Prop 16:
Soit $f \in L^1$.
Si $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = 0$,
Alors $f = 0$.

Rq 17:
Deux fonctions ayant même série de Fourier sont donc égales pp.

Prop 18:
Si $\sum_{n=-N}^{N} \alpha_n e_n$ converge uniformément vers une fonction f,
Alors f est continue et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = \alpha_n$.

Prop 19:
Soit $k \geq 2$, et $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e_n$.
Alors $\alpha_n = O_{\pm\infty}\left(\frac{1}{|n|^k}\right) \Rightarrow f$ est de classe C^{k-2}.

Ex 20:
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, paire, 2π-périodique et telle que :
$\forall x \in [0, \pi]$, $f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left((2^{p^3}+1)\frac{x}{2}\right)$
Alors f est bien définie, même continue ; mais sa série de Fourier diverge en 0.

II CONVERGENCES

1 Au sens de Cesàro

Déf 21:
Soit $f \in L^1$.
On appelle sommes de Cesàro les quantités :
$\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$, $N \in \mathbb{N}^*$.

Déf 22:
Soit $N \in \mathbb{N}$, on définit :
- le noyau de Dirichlet : $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n = \frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})x\right)}{\sin(x/2)}$
- le noyau de Fejér : $K_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin(x/2)}\right)^2$

Rq 23: On obtient, pour $f \in L^1$, $N \in \mathbb{N}^*$:
$S_N(f) = f * D_N$ et $\sigma_N(f) = f * K_N$.
L'intérêt majeur de K_N est d'être une identité approchée forte.

Thm 24: Fejér
1) Si f est continue, alors $\sigma_N(f)$ converge uniformément vers f
2) Si $f \in L^p$ ($p \in [1, +\infty[$), alors $\sigma_N(f)$ converge vers f pour $\|\cdot\|_p$.

Appli 25:
Les polynômes trigonométriques sont denses dans l'ensemble des fonctions continues (2π-périodiques) muni de $\|\cdot\|_\infty$ et dans les espaces L^p.

2 En moyenne quadratique

On munit L^2 du produit scalaire : $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$.
On a alors : $\forall f \in L^2$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\langle f, e_n \rangle = c_n(f)$.
La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormale, et pour $f \in L^2$:
$S_N(f) = P_{\mathcal{P}_N}(f)$ où $P_{\mathcal{P}_N}$ est la projection orthogonale sur $\mathcal{P}_N$.
Cela signifie que :
$\forall p \in \mathcal{P}_N$, $\|f - S_N(f)\|_2 \leq \|f - p\|_2$.

Prop 26: Inégalité de Bessel.
Soit $f \in L^2$,
Alors $\forall N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt$.

Thm 27:
$(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de L^2.

Rq 28:
Cela signifie que $\forall f \in L^2$, $\|S_N(f) - f\|_2 \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$, et même que $\left\|\sum_{n=-N}^{M} c_n(f) e_n - f\right\|_2 \xrightarrow[N, M \to \infty]{} 0$.

Cor 29: Égalité de Parseval
$\mathcal{F} : \begin{array}{|l} L^2 \to \ell^2 \\ f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \end{array}$ est une isométrie bijective.
Ainsi, $\forall f \in L^2$, $\|f\|_2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$.

Appli 30 :
On peut calculer des sommes comme : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Appli 31 :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique et de classe C^2.
Alors : $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt + \int_0^{2\pi} |f''(t)|^2 dt \geq 2 \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$

3 Convergences simple et uniforme

Thm 32 : Jordan-Dirichlet
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique, continue par morceaux.
Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que : $h \mapsto \frac{f(t_0+h) - f(t_0-h) - f(t_0^+) + f(t_0^-)}{h}$ soit bornée au voisinage de 0.
Alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{int_0}$ converge et : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{int_0} = \frac{f(t_0^+) - f(t_0^-)}{2}$.

Cor 33 :
Si f est 2π-périodique et C^1 par morceaux,
Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $S_N(f)(x) \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.

Rq 34 :
Si f est continue en x, alors $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = f(x)$.

Appli 35 :
On peut calculer : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Thm 36 :
Si f est 2π-périodique, continue et C^1 par morceaux,
Alors sa série de Fourier converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$

Appli 37 : Formule sommatoire de Poisson
Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, non-supposée périodique.
Alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\cdot + n)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}$, où $\hat{f}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi n t} dt$.

Appli 38 :
$\forall s \in \mathbb{R}^{+*}$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/s}$.

DÉVELOPPEMENT N°1

Appli 39 :
Soit $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$) la fonction 2π-périodique telle que : $\forall t \in [-\pi, \pi]$, $f_\alpha(t) = \cos(\alpha t)$.
La série de Fourier de f_α fournit successivement :
- $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$, $\cot t = \frac{1}{t} + 2t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}$
- $\forall t \in]-\pi, \pi[$, $\sin t = t \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right)$.
- $\forall t \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$, $\frac{1}{\sin^2 t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t - n\pi)^2}$.

Appli 40 : Résolution d'équations aux dérivées partielles.
Équation de la chaleur sur un anneau.
Soit $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, C^1 par morceaux et 2π-périodique.
Alors il existe une unique solution u, 2π-périodique par rapport à x pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ et C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ au problème :
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \forall x \in \mathbb{R},\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases}$$

DÉVELOPPEMENT N°2