261

FONCTION CARACTÉRISTIQUE ET TRANSFORMÉE DE LAPLACE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

Cadre : Soit X un vecteur aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, qu'on munit de son produit scalaire usuel $\langle .,. \rangle$.

I DÉFINITIONS & PREMIÈRES PROPRIÉTÉS.

1 Fonction caractéristique.

Déf 1 : ([BL], III.5.1)
On appelle fonction caractéristique de X, et on note φ_X la fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ par : $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{i\langle t,X\rangle}]$

Rq 2 : φ_X est la transformée de Fourier de la loi $\mathbb{P}_X$ de X.

Ex 3 : Si $X \sim b(p)$, alors $\varphi_X(t) = 1-p+pe^{it}$
Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\varphi_X(t) = \exp(\lambda(e^{it}-1))$ ([FF], 13.4)
Si $X \sim \mathcal{E}(\alpha)$, alors $\varphi_X(t) = \frac{\alpha}{\alpha - it}$. ([BL], III.5.5)
Si X suit la loi de Laplace, $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ et alors $\varphi_X(t) = \frac{1}{1+t^2}$

Rq 4 : Plus généralement, si X a pour densité f : $\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,x\rangle} f(x)\,dx$
si X est discrète : $\varphi_X(t) = \sum_{x_k \in \operatorname{supp}(X)} \mathbb{P}(X=x_k)\, e^{i\langle t,x_k\rangle}$

Prop 5 : ([Ouv2], prop 12.2)
La fonction caractéristique de X vérifie :
1) $\varphi_X(0) = 1$
2) φ_X est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$, et $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $|\varphi_X(t)| \leq 1$.
3) $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$.
4) $\forall A \in \mathcal{M}_{d,k}(\mathbb{R})$, $\forall b \in \mathbb{R}^k$, $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $\varphi_{AX+b}(t) = \varphi_X(A^*t)\, e^{i\langle b,t\rangle}$.

Thm 6 : ([BL], III.5.2)
Si X et Y sont deux vecteurs aléatoires de lois $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$,
Alors $\varphi_X = \varphi_Y \Rightarrow \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

App 7 : On montre ainsi que si $(X_1, \dots, X_n)$ sont des vaiid $\mathcal{E}(\alpha)$,
Alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $\Gamma(n, \alpha)$.

Thm 8 : Formule d'inversion de Fourier ([Ouv2], prop 12.7)
On suppose que φ_X soit intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.
Alors X admet une densité continue bornée f_X donnée par :
$\forall x \in \mathbb{R}^d$, $f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle t,x\rangle} \varphi_X(t)\,dt$.

DÉVELOPPEMENT N°1

Ex 9 : Si X suit la loi de Laplace, on obtient : $e^{-|x|} = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \frac{1}{\pi(1+t^2)}\,dt$
On en déduit alors que si $Y \sim \mathcal{C}(1)$, alors $\varphi_Y(t) = e^{-|t|}$
([BL], III.5.5)

2 Transformée de Laplace

Déf 10 : ([BL], III.5.9)
On appelle transformée de Laplace la fonction $L_X(s) = \mathbb{E}[e^{\langle s,X\rangle}]$, définie pour les valeurs de s pour lesquelles $e^{\langle s,X\rangle}$ est intégrable

Ex 11 : Si $X \sim b(p)$, alors $L_X(s) = 1-p+pe^s$, pour $s \in \mathbb{R}$
Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $L_X(s) = \exp(\lambda(e^s - 1))$, pour $s \in \mathbb{R}$ ([EXOS], 5.13)
Si $X \sim \mathcal{E}(\alpha)$, alors $L_X(s) = \frac{\alpha}{\alpha - s}$, pour $s \in]-\infty, \alpha[$.

Prop 12 : ([FF], 13.1) + ([FF], 13.2.1)
1) L_X est toujours définie en zéro et $L_X(0) = 1$.
2) Si X est bornée,
Alors L_X est définie et continue sur $\mathbb{R}^d$
3) $\forall A \in \mathcal{M}_{d,k}(\mathbb{R})$, $\forall b \in \mathbb{R}^k$, $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $L_{AX+b}(t) = L_X(A^*t)\, e^{\langle b,t\rangle}$.

Ex 13 : Si $X \sim \mathcal{C}(1)$, alors L_X n'est définie qu'en zéro.

Prop 14 : ([FF], 13.1) + ([FF], 13.2.1).
1) Si X est à valeurs réelles positives,
Alors L_X est continue et bornée sur $]-\infty, 0[$.
2) Si X est à valeurs réelles,
Alors L_X est convexe.

App 15 : Inégalité de Hoeffding ([Ouv2], exo 10.11)
On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles, indépendantes, bornées ps et centrées.
On suppose que $|X_n| \leq c_n$ ps et $c_n > 0$.
Alors $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^n X_j\right| > \varepsilon\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{j=1}^n c_j^2}\right)$.

Thm 16 : ([FF], 13.2.2)
Si X et Y sont deux vecteurs aléatoires de lois $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$,
Alors $L_X = L_Y \Rightarrow \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

II MOMENTS & RÉGULARITÉ.

Prop 17 : ([Ouv2], prop 12.14)
Soit X une variable aléatoire réelle.
1) Si X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$,
Alors φ_X est de classe C^n
et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X^{(k)}(t) = i^k\, \mathbb{E}[e^{itX} X^k]$
En particulier, $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k\, \mathbb{E}[X^k]$

2) Inversement, si φ_X est k fois dérivable en 0 ($k \geq 2$),
Alors X admet des moments jusqu'à l'ordre $2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$; ils sont donnés par la formule donnée en 1).

C-Ex 18: ([Ouv2], ex. 12.3)
Soit X une va de loi $\mathbb{P}_X = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_k$, où $\begin{cases} a_0 = a_1 = a_{-1} = 0 \\ \forall k \geq 2,\ a_k = a_{-k} = \frac{c}{k^2 \ln k} \end{cases}$

avec $c = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2 \ln k}\right)^{-1}$.

Dans ce cas, X n'admet pas de moment d'ordre 1, alors même que φ_X est dérivable partout.

Ex 19:
Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.
X admet un moment d'ordre 1 donc φ_X est C^1.
On trouve $\varphi_X'(t) = -t\varphi_X(t)$ d'où $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$.
Puis, si $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors $\varphi_Y(t) = e^{itm - \sigma^2 t^2/2}$.

Prop 20: ([Ouv2], prop 12.16)
Soit X une va réelle.
1) Si X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$,
Alors φ_X admet un développement de Taylor en 0 avec reste intégral :
$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}[X^k] + \frac{(it)^n}{(n-1)!} \mathbb{E}\left[X^n \int_0^1 (1-u)^{n-1} e^{itux} du\right]$
Il en résulte : $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}[X^k] + \frac{(it)^n}{n!} \varepsilon_n(t)$,
où $|\varepsilon_n(t)| \leq 2\,\mathbb{E}[|X^n|]$ et $\lim_{t \to 0} \varepsilon_n(t) = 0$.
2) Si X admet des moments de tout ordre et si $\limsup_{n \to \infty} \frac{\|X\|_n}{n} = \frac{1}{R} < \infty$
Alors φ_X est analytique sur $]-\frac{R}{e}, \frac{R}{e}[$; $\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}[X^k]$.

Thm 21: ([BL], III.5.7)
Si X est une va réelle, avec φ_X analytique dans un voisinage de 0
Alors la loi de X est caractérisée par ses moments.

C-Ex 22: ([BL], III.7.7)
Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$; $Z = e^X$ a pour densité $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{z} e^{-\frac{(\ln z)^2}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(z)$
Pour $a \in [-1,1]$, soit Z_a de densité $f_a(x) = f_Z(x)(1 + a.\sin(2\pi.\ln x))$.
Z et Z_a ont les mêmes moments, mais pas la même loi.

Prop 23: ([BL], III.5.10)
Soit X une va réelle, avec e^{tX} intégrable pour t dans un intervalle contenant 0. Alors L_X est définie sur cet intervalle.
De plus, L_X est analytique sur un voisinage de 0 et pour tout t dans ce voisinage : $L_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbb{E}[X^k]$.
En particulier, on a : $L_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}[X^n]$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Ex 24:
Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, on obtient $L_X'(t) = tL_X(t)$ donc $L_X(t) = e^{t^2/2}$
Donc si $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $L_Y(t) = e^{tm + \sigma^2 t^2/2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

III INDÉPENDANCE

Prop 25: ([Ouv2], cor 12.9)
Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$
On a : $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \Leftrightarrow \forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2},\ \varphi_{(X_1,X_2)}(t_1,t_2) = \varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2)$.

Cor 26: ([Ouv2], cor 12.10)
On a : $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \Leftrightarrow \forall (t_1,t_2) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2},\ \varphi_{(X_1,X_2)}(t_1,t_2) = \varphi_{(X_1,X_2)}(t_1,0)\varphi_{(X_1,X_2)}(0,t_2)$

Ex 27: ([Ouv2], ex 12.1)
Soient X_1, X_2 vaiid de loi de Laplace : $\varphi_{X_1}(t) = \varphi_{X_2}(t) = \frac{1}{1+t^2}$.
Soient $Y_1 = X_1 - X_2$ et $Y_2 = X_1 + X_2$, ie $\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$.
On obtient $\varphi_{(X_1,X_2)}(t_1,t_2) = \frac{1}{1+t_1^2} \cdot \frac{1}{1+t_2^2}$
D'où $\varphi_{(Y_1,Y_2)}(t_1,t_2) = \frac{1}{1+(t_1+t_2)^2} \cdot \frac{1}{1+(-t_1+t_2)^2}$.
Ainsi $Y_1 \not\!\perp\!\!\!\perp Y_2$ car $\varphi_{(Y_1,Y_2)}(1,1) \neq \varphi_{Y_1}(1) \cdot \varphi_{Y_2}(1)$ (alors même qu'elles sont non-corrélées)

Cor 28: ([Ouv2], cor 12.12)
Si $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ sont des vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$,
Alors $\forall t \in \mathbb{R}^d,\ \varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)$.

Ex 29:
- Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors $\varphi_X(t) = (1-p+pe^{it})^n$ pour $t \in \mathbb{R}$.
- Si $X_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ sont indépendantes, Alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

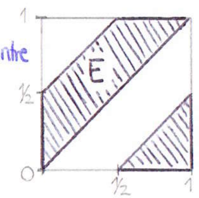
C-Ex 30: Soit $X \sim \mathcal{C}(1)$, $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$ où $t \in \mathbb{R}$. ([FF], 13.4.3)
Soit $Y = X$, on a : $Y \not\!\perp\!\!\!\perp X$ et $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_{2X}(t) = e^{-2|t|} = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$.

Prop 31: ([Ouv2], exo 12.5)
Soient X et Y deux va réelles bornées.
On a : $X \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow \forall (k,\ell) \in \mathbb{N}^2,\ \mathbb{E}[X^k Y^\ell] = \mathbb{E}[X^k]\mathbb{E}[Y^\ell]$.

Prop 32: ([FF], 13.4.4) + ([FF], exo 13.10)
1) Si φ est une fonction caractéristique,
Alors $\overline{\varphi}$, $|\varphi|^2$ et $\mathrm{Re}(\varphi)$ sont des fonctions caractéristiques.
2) Toute combinaison convexe de fonctions caractéristiques est une fonction caractéristique.

Prop 33: ([FF], 13.2.3 + 13.6.4)
Soient X_1 et X_2 deux vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^{d_1}$, $\mathbb{R}^{d_2}$.
On a : 1) $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \Rightarrow L_{X_1+X_2}(t) = L_{X_1}(t)L_{X_2}(t)$ dans un voisinage de 0.
2) $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \Leftrightarrow L_{(X_1,X_2)}(t_1,t_2) = L_{X_1}(t_1) \cdot L_{X_2}(t_2)$ dans un voisinage de (0,0).

C-Ex 34: ([FF], 13.2.3)
Soit (X,Y) de densité $f(x,y) = 2\,\mathbb{1}_E(x,y)$ où E est ci-contre
On a : $L_{X+Y}(s) = L_X(s)L_Y(s)$ mais $X \not\perp\!\!\!\perp Y$



Ex 35:
Lois composées : Soient (X_i) des va iid $b(p)$.
Soit $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $Z = \sum_{i=1}^{N} X_i \sim \mathcal{P}(\lambda p)$.

IV CONVERGENCE EN LOI

1 Définitions et Caractérisations

Déf 36: ([BL], V.4.1)
Soit $(X_n)_n$ une suite de va.
On dit que X_n converge en loi vers X, noté $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$
$\Leftrightarrow$ En tout point t de continuité de F_X, $F_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(t)$.

Prop 37: ([BL], V.4.1)
On a : $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \forall g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée, $\mathbb{E}[g(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[g(X)]$.

Thm 38: Lévy ([BL], V.4.1)
On a : $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi_X(t)$

Thm 39: ([EXOS], chap 5.4)
Soient $X, X_1, \dots, X_n, \dots$ des va admettant des transformées de Laplace sur un intervalle ouvert I contenant 0.
Alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X \Leftrightarrow \forall t \in I$, $L_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} L_X(t)$

Ex 40
Si $m_n \xrightarrow[n\to\infty]{} m$ et $\sigma_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma^2$
Alors pour $X_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$, on a : $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

App 41: Théorème des événements rares. ([Ouv2], th 14.20)
Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une famille finie $\{A_{n,j} \mid 1 \leq j \leq M_n\}$ d'événements indépendants.
On pose $p_{n,j} := \mathbb{P}(A_{n,j})$ et on note $S_n = \sum_{j=1}^{M_n} \mathbb{1}_{A_{n,j}}$.
On suppose : $\max_{1 \leq j \leq M_n} p_{n,j} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\sum_{j=1}^{M_n} p_{n,j} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda > 0$.
Alors on a : $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} S \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

DÉVELOPPEMENT N°2.

App 42: Théorème de Bochner ([EXOS], exo 4.24).
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, telle que $\varphi(0) = 1$.
On suppose de plus : $\forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$, $\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $\sum_{1 \leq j,k \leq n} \varphi(t_j - t_k) a_j \overline{a_k} \geq 0$.
Alors φ est une fonction caractéristique.

2 Théorèmes limite

Thm 43 Loi faible des grands nombres ([BL], V.5.1)
Soit $(X_n)_n$ une suite de va iid intégrables.
On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$; on a : $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1]$.

Thm 44: Théorème Central Limite ([BL], V.5.4)
Soit $(X_n)_n$ une suite de va iid L^2.
On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$.
Alors on a : $\frac{S_n - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.

App 45: Détermination d'un intervalle de confiance asymptotique pour le paramètre d'une loi de Bernoulli.
Si $(X_i)_i$ est une suite de va iid $b(p)$.
Pour $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, on a : $\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.
Comme $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} p$, $\frac{S_n - np}{\sqrt{n \frac{S_n}{n}(1-\frac{S_n}{n})}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$.
Pour $a > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n - np}{\sqrt{n\frac{S_n}{n}(1-\frac{S_n}{n})}}\right| \leq a\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{-a}^{a} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt =: p_a$.
Donc pour "n grand", $\left[\frac{S_n}{n} - \frac{a}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{S_n}{n}(1-\frac{S_n}{n})}, \frac{S_n}{n} + \frac{a}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{S_n}{n}(1-\frac{S_n}{n})}\right]$ contient p avec la probabilité p_a.

Références :
[BL] : P. Barbe et M. Ledoux, Probabilité, 1e éd.
[Ouv2] : J.-Y. Ouvrard, Probabilités 2, 2e éd.
[FF] : D. Foata et A. Fuchs, Calcul des probabilités, 2e éd.
[EXOS] : M. Cottrell, V. Genon-Catalot, C. Duhamel et T. Meyre, Exercices de probabilités, 3e éd.