

Leçon 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales d'une ou plusieurs variables réelles

(Mémoire pour le Master 2)
Novembre 2014

Florian LEMONNIER

ENS Rennes

Université de Rennes 1

Table des matières

Introduction	2
1 Méthodes directes	3
1.1 Primitives [Gou08]	3
1.1.1 Primitives usuelles	3
1.1.2 Fractions rationnelles	3
1.1.3 Polynômes en sinus et cosinus	4
1.2 Intégration par parties	4
1.3 Changement de variable [BP12, Gou08]	4
1.4 Parenthèse sur la mesurabilité et l'intégrabilité [BP12]	6
2 Utilisation de convergences	8
2.1 Sommes de Riemann [Gou08]	8
2.2 Suites et séries de fonctions [BP12, Gou08]	9
2.3 Régularité des intégrales à paramètre [BP12]	11
3 Utilisation de l'analyse complexe [BMP05, AM04]	12
4 Calcul approché d'intégrales	16
4.1 Méthodes des rectangles [Dem06]	16
4.2 Méthode de quadrature de Gauss [Rom05]	18
4.3 Méthode de Monte-Carlo [Tou99]	20
Références	22

Introduction

Le calcul intégral a de nombreuses applications en mathématiques. Tout d'abord, il permet de calculer des aires et des volumes d'objets dont on est capable de paramétrer le bord.

Il permet d'établir la convergence de certaines suites en utilisant des sommes de Riemann, ou en comparant une intégrale à une série.

En probabilités, on est souvent amené à calculer une intégrale pour déterminer la probabilité qu'une variable aléatoire à densité prenne sa valeur dans un certain intervalle. Ceci a une grande application quand on s'intéresse à des variables aléatoires normales : l'obtention d'intervalles de confiance par le théorème central limite nécessite le calcul intégral.

Dans cette leçon, on se placera dans le cadre de l'intégration de fonctions de la variable réelle. Cela ne signifie pas que l'intégration de fonctions méromorphes dans le plan complexe sera totalement délaissée : elle aura ici le rôle d'outil pour calculer d'autres intégrales de la variable réelle.

Une première et large partie s'intéressera au calcul exact d'intégrales. On présentera diverses méthodes, comme l'intégration par parties et le changement de variables, en dimension 1 ou plus ; on utilisera ensuite des résultats de convergence de suites et séries, ainsi que de continuité et dérivabilité d'intégrales à paramètres : l'obtention d'équations différentielles, dont l'unicité de la solution est fournie par le théorème de Cauchy-Lipschitz, se révélera cruciale. Enfin, on utilisera l'analyse complexe (le théorème de résidus notamment) pour calculer des intégrales de la variable réelle.

Cependant, on est forcé de constater qu'on ne peut pas toujours calculer une intégrale de façon exacte : la gaussienne en est un illustre exemple. On abordera donc à la fin de ce mémoire quelques méthodes de calcul approché d'intégrales : la méthode des rectangles, une méthode de quadrature (due à Gauss), ainsi que la méthode de Monte-Carlo (basée sur la loi des grands nombres et le théorème central limite).

1 Méthodes directes

1.1 Primitives [Gou08]

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} . La fonction f admet alors une primitive F . Si F est facile à déterminer, on peut alors utiliser la formule bien connue :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

On adoptera la notation $\int f(x) dx = F(x) + k$ lorsque F est une primitive de f , c'est-à-dire que l'ensemble des primitives de f est l'ensemble des fonctions $x \mapsto F(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

1.1.1 Primitives usuelles

On commence par donner un tableau de primitives usuelles, qui ne se veut évidemment pas exhaustif.

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	sh x	ch x
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	ch x	sh x
e^x	e^x	th x	$\ln(\text{ch } x)$
$\sin x$	$-\cos x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\cos x$	$\sin x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+b}}, b \neq 0$	$\ln x + \sqrt{x^2+b} $
$\tan x$	$-\ln \cos x $	$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$

1.1.2 Fractions rationnelles

Pour calculer l'intégrale d'une fraction rationnelle à coefficients réels, on commence par la décomposer en éléments simples sur \mathbb{R} . On est ainsi ramené à calculer les primitives des fonctions de la forme :

$$\int \frac{dx}{(x-a)^h} \quad \text{où } h \in \mathbb{N}^*$$

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^h} dx \quad \text{où } c^2 - 4d < 0 \text{ et } h \in \mathbb{N}^*$$

Ces deux primitives peuvent être calculées en utilisant intégration par parties et changement de variable, deux méthodes exposées plus bas.

Exemple : On cherche une primitive de $\frac{1}{x(x^2+1)^2}$.

$$\text{On a : } \frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

$$\text{On en déduit alors : } \int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} + k$$

1.1.3 Polynômes en sinus et cosinus

On veut calculer les primitives $\int \sin^m x \cos^n x dx$, où $m, n \in \mathbb{N}$. Si m et n sont pairs, on opère par linéarisation ; sinon, il est préférable d'effectuer un changement de variable (la règle de Bioche sera présentée plus bas).

Exemple : On cherche une primitive de $\cos^4 x \sin^2 x$.

$$\text{On a : } \int \cos^4 x \sin^2 x dx = \int \cos^4 x dx - \int \cos^6 x dx.$$

$$\text{Or } \cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 = \frac{1}{8} \left(\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2} + 4 \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + 3 \right) = \frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{3}{8}.$$

$$\text{De même } \cos^6 x = \frac{1}{32} \cos(6x) + \frac{3}{16} \cos(4x) + \frac{15}{32} \cos(2x) + \frac{5}{16}.$$

$$\text{Et donc : } \int \cos^4 x \sin^2 x dx = \frac{1}{192} \sin(6x) + \frac{5}{64} \sin(4x) + \frac{31}{64} \sin(2x) + \frac{11}{16} x + k.$$

1.2 Intégration par parties

Proposition 1 (Formule d'intégration par parties)

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur le segment $[a, b]$.

On a l'égalité suivante :

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

Cette formule est un corollaire de la formule de dérivation du produit :

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Application : Formule de récurrence des intégrales de Wallis

$$\text{Soit } n \geq 2, W_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) dx = \left[-\sin^{n-1}(x) \cos(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \sin^{n-2}(x) dx = (n-1) (W_{n-2} - W_n).$$

$$\text{Ce qui nous fournit : } W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}.$$

Application : Évaluation de la fonction Gamma d'Euler aux points entiers naturels

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) := \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = \left[-t^n e^{-t} \right]_0^{\infty} + n \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt = n\Gamma(n).$$

$$\text{Ce qui nous fournit : } \forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$$

1.3 Changement de variable [BP12, Gou08]

Proposition 2 (Formule de changement de variable unidimensionnel)

Soit φ un C^1 -difféomorphisme défini sur le segment $[a, b]$, à valeurs réelles.

Soit f une fonction continue sur le segment $\varphi([a, b])$.

On a l'égalité suivante :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du$$

Cette formule est un corollaire de la formule de dérivation de la composée :

$$(f \circ \varphi)'(x) = \varphi'(x)f'(\varphi(x))$$

Exemple : Règle de Bioche pour les fractions rationnelles en $\cos(x)$ et $\sin(x)$

Il s'agit d'étudier les invariances de $R(\cos x, \sin x) dx$:

- Si on a l'invariance $x \rightarrow -x$, on pose $t = \cos x$;

- Si on a l'invariance $x \rightarrow \pi - x$, on pose $t = \sin x$;
- Si on a l'invariance $x \rightarrow \pi + x$, on pose $t = \tan x$.

Application : On veut calculer une primitive de $x \mapsto \frac{\sin^3(x)}{1 + \cos^2(x)}$.

La règle de Bioche nous invite à poser $t = \cos x$, et on a :

$$\int \frac{\sin^3(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = \int \frac{1 - t^2}{1 + t^2} (-dt) = t - 2 \arctan(t) + k = \cos(x) - 2 \arctan(\cos(x)) + k$$

Proposition 3 (Formule de changement de variable multidimensionnel)

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n .

Soit $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un C^1 -difféomorphisme ; on note $V = \varphi(U)$.

On pose : $J\varphi(u) = \det \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(u) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Soit f une fonction continue sur V .

On a l'égalité suivante :

$$\int_V f(v) dv = \int_U f(\varphi(u)) |J\varphi(u)| du$$

Application : Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires dans \mathbb{R}^2

Soit D un ouvert de \mathbb{R}^2 , si $\Delta = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\mid (r \cos \theta, r \sin \theta) \in D\}$ (c'est-à-dire si Δ représente D en coordonnées polaires), alors on a :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

Exemple : Volume de la boule euclidienne de \mathbb{R}^d : $\mathcal{B}_d := \{x \in \mathbb{R}^d \mid x_1^2 + \dots + x_d^2 \leq 1\}$

Soit $d \geq 3$.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_d &= \lambda_d(\mathcal{B}_d) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\{x_1^2 + \dots + x_d^2 \leq 1\}} dx_1 \dots dx_d \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^{d-2}} \mathbb{1}_{\{x_1^2 + \dots + x_{d-2}^2 \leq 1 - x_{d-1}^2 - x_d^2\}} dx_1 \dots dx_{d-2} \right) \mathbb{1}_{\{x_{d-1}^2 + x_d^2 \leq 1\}} dx_{d-1} dx_d \end{aligned}$$

- Si $x_{d-1}^2 + x_d^2 = 1$,

alors $\int_{\mathbb{R}^{d-2}} \mathbb{1}_{\{x_1^2 + \dots + x_{d-2}^2 \leq 1 - x_{d-1}^2 - x_d^2\}} dx_1 \dots dx_{d-2} = \lambda_d(\{0_{\mathbb{R}^{d-2}}\}) = 0$.

- Si $x_{d-1}^2 + x_d^2 < 1$, on pose $x_i = u_i \sqrt{1 - x_{d-1}^2 - x_d^2}$, pour $1 \leq i \leq d - 2$.

On définit alors clairement une application linéaire bijective de déterminant $(1 - x_{d-1}^2 - x_d^2)^{\frac{d}{2}-1}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_d &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathcal{B}_{d-2}} (1 - x_{d-1}^2 - x_d^2)^{\frac{d}{2}-1} du_1 \dots du_{d-2} \right) \mathbb{1}_{\{x_{d-1}^2 + x_d^2 \leq 1\}} dx_{d-1} dx_d \\ &= \int_{\{x_{d-1}^2 + x_d^2 \leq 1\}} \mathcal{V}_{d-2} (1 - x_{d-1}^2 - x_d^2)^{\frac{d}{2}-1} dx_{d-1} dx_d \\ &= \mathcal{V}_{d-2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 (1 - r^2)^{\frac{d}{2}-1} r dr d\theta \\ &= \mathcal{V}_{d-2} \times 2\pi \int_0^1 (1 - r^2)^{\frac{d}{2}-1} r dr = \frac{2\pi}{d} \mathcal{V}_{d-2} \end{aligned}$$

Il vient donc finalement :

- Si d est pair, $\mathcal{V}_d = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\left(\frac{d}{2}\right)!}$;

- Si d est impair, $\mathcal{V}_d = \frac{2^d \pi^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{d-1}{2}\right)!}{d!}$.

1.4 Parenthèse sur la mesurabilité et l'intégrabilité [BP12]

Définition 4 (Espace mesurable)

Soit X un ensemble. On appelle tribu sur X toute famille \mathcal{A} de parties de X vérifiant :

- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- Si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^c \in \mathcal{A}$;
- Si pour $n \geq 1$, $A_n \in \mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$.

On dit alors que (X, \mathcal{A}) est un espace mesurable.

Définition 5 (Tribu borélienne)

Soit $(X, \mathcal{O}(X))$ un espace topologique.

La tribu borélienne de X , notée $\mathcal{B}(X)$, est la tribu engendrée par $\mathcal{O}(X)$, c'est-à-dire la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) contenant $\mathcal{O}(X)$.

Définition 6 (Mesurabilité)

Soient (X, \mathcal{A}) et (Y, \mathcal{B}) deux espaces mesurables.

On dit que $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ est mesurable si $\forall B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Remarque : Dans les applications courantes, X et Y sont souvent $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{C}, \overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{R}}^+$ ou \mathbb{R}^d , et sont munis de leur tribu borélienne. On omettra alors couramment de faire figurer celle-ci.

Définition 7 (Mesure positive sur un espace mesurable)

Soit (X, \mathcal{A}) un espace mesurable.

On appelle mesure (positive) sur (X, \mathcal{A}) toute application $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$, vérifiant :

- $\mu(\emptyset) = 0$;
- Si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'éléments de \mathcal{A} , deux à deux disjoints, alors : $\mu \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$.

On dit alors que (X, \mathcal{A}, μ) est un espace mesuré.

Proposition 8 (Mesure de Lebesgue)

Il existe une unique mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, dite mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d et notée λ_d vérifiant :

- $\lambda_d([0, 1]^d) = 1$;
- $\forall a \in \mathbb{R}^d, \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d(a + A) = \lambda_d(A)$.

Définition 9 (Intégrabilité)

Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et Y un espace topologique.

Une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B}(Y))$ mesurable est dite μ -intégrable si $|f|$ est μ -intégrable, c'est-à-dire :

$$\int_X |f(x)| d\mu(x) < +\infty.$$

Remarque : Quand on parlera de fonction intégrable en sous-entendant la mesure, c'est que la mesure considérée est la mesure de Lebesgue.

Théorème 10 (Fubini)

Soient Ω_1, Ω_2 deux ouverts de \mathbb{R}^{n_1} et \mathbb{R}^{n_2} .

1. Soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

$$\text{Alors on a : } \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(x, y) \, dy \, dx = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) \, dx \, dy.$$

2. Soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ une fonction mesurable.

$$\text{Alors on a : } \int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} f(x, y) \, dy \, dx = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Remarque : On utilise aussi souvent Fubini pour des fonctions continues sur un produit de pavés compacts.

Exemple : Intégrale de Gauss : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$.

Pour $a > 0$, on définit : $\mathcal{D}_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ et $\mathcal{C}_a := [-a, a]^2$.

On pose :

$$I_a := \iint_{\mathcal{D}_a} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^a e^{-r^2} r \, dr \, d\theta = \pi (1 - e^{-a^2})$$

$$J_a := \iint_{\mathcal{C}_a} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy = \left(\int_{-a}^a e^{-x^2} \, dx \right)^2$$

Par positivité de l'intégrale, on a : $I_a \leq J_a \leq I_{\sqrt{2}a}$.

On fait tendre a vers $+\infty$ et on obtient le résultat.

2 Utilisation de convergences

2.1 Sommes de Riemann [Gou08]

Définition 11

Soit E un espace vectoriel normé sur \mathbb{R} de dimension finie.

Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction bornée, et $a = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_n = b$ une subdivision de $[a, b]$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit $\xi_i \in [\sigma_{i-1}, \sigma_i]$.

On appelle pas de la subdivision σ la quantité $|\sigma| = \sup_{1 \leq i \leq n} (\sigma_i - \sigma_{i-1})$.

On appelle somme de Riemann de f pour la subdivision pointée (σ, ξ) , la quantité $S(f, \sigma, \xi)$, définie par :

$$S(f, \sigma, \xi) = \sum_{i=1}^n (\sigma_i - \sigma_{i-1}) f(\xi_i)$$

Théorème 12

Soit $f : [a, b] \rightarrow E$ une fonction continue. Alors on a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (\sigma, \xi) \text{ subdivision pointée de } [a, b], |\sigma| < \alpha \Rightarrow \left\| \int_a^b f(x) dx - S(f, \sigma, \xi) \right\| < \epsilon$$

En particulier, on a, pour la subdivision régulière :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx$$

Exemple : Calcul de $I(\rho) := \int_0^\pi \ln(1 - 2\rho \cos \theta + \rho^2) d\theta$, pour $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$

Le théorème donne : $I(\rho) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, avec $u_n = \frac{\pi}{n} \ln \left[\prod_{k=1}^n \left(1 - 2\rho \cos \left(\frac{k\pi}{n} \right) + \rho^2 \right) \right]$.

Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note : $\omega_k = e^{i \frac{k\pi}{n}}$. On a :

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - 2\rho \cos \left(\frac{k\pi}{n} \right) + \rho^2 \right) = \prod_{k=1}^n (\rho - \omega_k)(\rho - \omega_{-k}) = \frac{\rho - \omega_n}{\rho - \omega_0} \prod_{k=-n}^{n-1} (\rho - \omega_k) = \frac{\rho + 1}{\rho - 1} (\rho^{2n} - 1)$$

Et donc, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\pi}{n} \ln \left[\frac{(\rho^{2n} - 1)(\rho + 1)}{\rho - 1} \right]$$

On en déduit :

- Si $|\rho| < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, et donc $I(\rho) = 0$.

- Si $|\rho| > 1$, alors on transforme l'écriture de u_n en :

$$u_n = 2\pi \ln |\rho| + \frac{\pi}{n} \ln \left[\frac{\rho + 1}{\rho - 1} (1 - \rho^{-2n}) \right]$$

Et on en déduit : $I(\rho) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2\pi \ln |\rho|$.

2.2 Suites et séries de fonctions [BP12, Gou08]

Théorème 13 (Convergence dominée de Lebesgue)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur \mathbb{R} . On suppose :

- Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge ;
- Il existe $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ intégrable, telle que :
pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$

Alors il existe f , une fonction intégrable sur \mathbb{R} , telle que :

- Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$;
- $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ (et même : $\int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$).

Application : Continuité de la transformée de Fourier

Soit $y \in \mathbb{R}$, limite de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit f intégrable.

On pose $f_n(x) = f(x)e^{-ixy_n}$; la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors dominée par f .

Alors : $\hat{f}(y_n) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixy_n} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixy} dx = \hat{f}(y)$.

Exemple : Calcul de l'intégrale de Fresnel : $\Phi := \int_0^{\infty} e^{ix^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

Pour $t, T \geq 0$, on pose : $f(t) = \int_0^t e^{ix^2} dx$, $F(t) = \int_0^t \int_0^t e^{i(x^2+y^2)} dy dx$ et $I(T) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt$.

On va exprimer $F(t)$ de deux manières.

D'une part, la fonction $(x, y) \mapsto e^{i(x^2+y^2)}$ est continue sur le pavé compact $[0, t]^2$. En appliquant Fubini, on obtient : $F(t) = f(t)^2$.

D'autre part, notons :

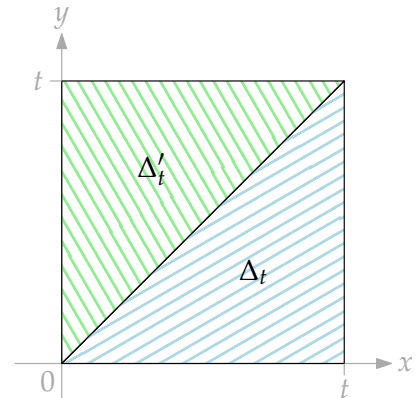
$$\Delta_t = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, t] \text{ et } y \in [0, x] \right\}$$

$$\Delta'_t = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0, t] \text{ et } x \in [0, y] \right\}$$

La fonction $(x, y) \mapsto (y, x)$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de Δ_t sur Δ'_t .

Par changement de variable, on obtient :

$$F(t) = \iint_{\Delta_t} e^{i(x^2+y^2)} dx dy + \iint_{\Delta'_t} e^{i(x^2+y^2)} dx dy = 2 \iint_{\Delta_t} e^{i(x^2+y^2)} dx dy$$



La forme de l'intégrande suggère alors un passage en coordonnées polaires : $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $K_t := \left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \text{ et } r \in \left[0, \frac{t}{\cos \theta}\right] \right\}$ sur Δ_t .

On obtient alors :

$$F(t) = 2 \iint_{K_t} e^{ir^2} r dr d\theta = \frac{1}{i} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{t}{\cos \theta}} 2ir e^{ir^2} dr d\theta = -i \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\exp\left(\frac{it^2}{\cos^2 \theta}\right) - 1 \right) d\theta = \frac{i\pi}{4} - i \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(\frac{it^2}{\cos^2 \theta}\right) d\theta$$

Puis, en injectant dans $I(T)$, on obtient :

$$I(T) = \frac{i\pi}{4} - \frac{i}{T} \int_0^T \int_0^{\frac{\pi}{4}} \exp\left(\frac{it^2}{\cos^2 \theta}\right) d\theta dt$$

En appliquant Fubini, puis le changement de variable $u = \frac{t}{\cos \theta}$, on trouve :

$$I(T) = \frac{i\pi}{4} - \frac{i}{T} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^T \exp\left(\frac{it^2}{\cos^2 \theta}\right) dt d\theta = \frac{i\pi}{4} - \frac{i}{T} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{T}{\cos \theta}} e^{iu^2} \cos \theta du d\theta = \frac{i\pi}{4} - \frac{i}{T} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{T}{\cos \theta}\right) \cos \theta d\theta$$

On souhaite désormais faire tendre T vers $+\infty$. On va montrer que f est bornée au voisinage de $+\infty$. Il suffit de montrer que l'intégrale de Fresnel est convergente. Étudions $\int_1^t e^{ix^2} dx$.

Par changement de variable $u = x^2$ et en faisant une intégration par parties :

$$\int_1^t e^{ix^2} dx = \int_1^{t^2} e^{iu} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \left[\frac{e^{iu}}{i} \frac{1}{2\sqrt{u}} \right]_1^{t^2} - \int_1^{t^2} \frac{e^{iu}}{i} \frac{-1}{4u^{\frac{3}{2}}} du = \underbrace{\frac{e^{it^2}}{2it}}_{\xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0} - \frac{e^i}{2i} + \frac{1}{4i} \int_1^{t^2} \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}} du$$

quantité bornée par convergence dominée

Donc f est bornée au voisinage de $+\infty$, donc $\lim_{T \rightarrow +\infty} I(T) = i \frac{\pi}{4}$.

Par ailleurs, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \Phi$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \Phi^2$. Montrons que $\lim_{T \rightarrow \infty} I(T) = \Phi^2$.

Soit $\varepsilon > 0$; $\exists A > 0, \forall t \geq A, |F(t) - \Phi^2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $T > A$, on a :

$$I(T) = \frac{1}{T} \int_0^A F(t) dt + \frac{1}{T} \int_A^T F(t) dt \text{ puis } |I(T) - \Phi^2| \leq \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^A |F(t) - \Phi^2| dt}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ pour } T \geq T_0} + \underbrace{\frac{1}{T} \int_A^T |F(t) - \Phi^2| dt}_{< \frac{\varepsilon}{2} \frac{T-A}{T}}$$

Donc pour $T \geq \max\{A, T_0\}$, $|I(T) - \Phi^2| < \varepsilon$, d'où $\lim_{T \rightarrow \infty} I(T) = \Phi^2$.

Par unicité de la limite : $\Phi^2 = i \frac{\pi}{4}$, d'où $\Phi = \pm \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$.

Pour déterminer le bon signe, on regarde le signe de $\Im(\Phi)$:

$$\begin{aligned} \Im(\Phi) &= \Im \left(\int_0^\infty e^{ix^2} dx \right) = \Im \left(\int_0^\infty e^{iu} \frac{du}{2\sqrt{u}} \right) = \int_0^\infty \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du = \sum_{k=0}^\infty \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du \\ &= \sum_{k=0}^\infty \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du + \int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du = \sum_{k=0}^\infty \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin u}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u+\pi}} \right) du \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\Phi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$.

Théorème 14 (Convergence monotone)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables d'un espace mesuré (X, \mathcal{A}, μ) dans $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$.

Alors $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ est une fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ et $\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$.

Théorème 15

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables.

1. Si les f_n sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, alors $\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^\infty f_n(x) dx = \sum_{n=0}^\infty \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx$.

2. Si $\sum_{n=0}^\infty \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| dx < +\infty$, alors les fonctions f_n et $\sum_{n=0}^\infty f_n$ sont intégrables.

En outre, $\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^\infty f_n(x) dx = \sum_{n=0}^\infty \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx$.

Exemple : Considérons la série $\sum_{n \geq 1} e^{-nx} x^2$.

Les fonctions $x \mapsto e^{-nx} x^2$ sont à valeurs positives et on a : $\int_0^\infty e^{-nx} x^2 dx = \frac{2}{n^3}$.

Ainsi, $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} x^2 dx = 2\zeta(3)$.

2.3 Régularité des intégrales à paramètre [BP12]

Dans cette sous-section, I désigne un intervalle quelconque de \mathbb{R} , d'extrémités a et b , avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, et E désigne un espace vectoriel normé complet.

Théorème 16 (Continuité sous le signe intégrale)

Soit A un espace métrique et $f : A \times I \rightarrow E$, une application telle que :

- $\forall x \in A, t \mapsto f(x, t)$ est mesurable ;
- $\forall t \in I, x \mapsto f(x, t)$ est continue ;
- $\forall K \subset A$ compact, $\exists g : I \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable, $\forall x \in K, |f(x, t)| \leq g(t)$ presque partout sur I .

Alors $x \mapsto \int_I f(t, x) dt$ est continue sur A .

Théorème 17 (Dérivabilité sous le signe intégrale)

Soit A un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $f : A \times I \rightarrow E$, une application telle que :

- $\forall x \in A, t \mapsto f(x, t)$ est intégrable ;
- Pour presque tout $t \in I, x \mapsto f(x, t)$ est dérivable (resp. C^1) ;
- $\forall K \subset A$ compact, $\exists g : I \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable, $\forall x \in K, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq g(t)$ presque partout sur I .

On note $F : x \mapsto \int_I f(t, x) dt$.

Alors $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est intégrable, F est dérivable (resp. C^1) et $F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$

Exemple : Calcul de $I(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$

On définit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \times]0, \infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \end{cases}$.

Soit $x \in \mathbb{R}, t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, \infty[$ car elle est continue, $\lim_{t \rightarrow 0} f(x, t) = x$ et $\forall t \geq 1, |f(x, t)| \leq e^{-t}$ (qui est elle-même intégrable en $+\infty$).

Pour $t \in]0, \infty[, x \mapsto f(x, t)$ est C^1 .

Aussi $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = e^{-t} \cos(xt)$ d'où $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-t}$ et $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $]0, \infty[$.

On en déduit :

$$I'(x) = \int_0^\infty e^{-t} \cos(xt) dt = \Re \left(\int_0^\infty e^{-t+ixt} dt \right) = \Re \left(\left[\frac{1}{-1+ix} e^{-t+ixt} \right]_0^\infty \right) = \Re \left(\frac{1}{1-ix} \right) = \frac{1}{1+x^2}$$

On en déduit alors :

$$I(x) = I(0) + \arctan x = \arctan x$$

Exemple : Calcul de la transformée de Fourier de la gaussienne

On cherche à calculer : $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} e^{-t^2} dt$.

On définit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \times]0, \infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto e^{ixt} e^{-t^2} \end{cases}$.

Soit $x \in \mathbb{R}, |f(x, t)| = e^{-t^2}$ donc $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur \mathbb{R} .

Soit $t \in \mathbb{R}, x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 .

On a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = e^{-t^2} i t e^{ixt}$ donc $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = |t| e^{-t^2}$ et $t \mapsto |t| e^{-t^2}$ est intégrable.

Par conséquent, on a, en intégrant par parties :

$$\hat{f}'(x) = \int_{\mathbb{R}} i t e^{-t^2} e^{ixt} dt = \left[i \frac{e^{-t^2}}{2} e^{ixt} \right]_{\mathbb{R}} - \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} \frac{x}{2} e^{ixt} dt = \frac{x}{2} \hat{f}(x)$$

On en déduit :

$$\hat{f}(x) = \hat{f}(0) \exp \left(-\frac{t^2}{4} \right) = \sqrt{\pi} \exp \left(-\frac{t^2}{4} \right)$$

3 Utilisation de l'analyse complexe [BMP05, AM04]

Définition 18 (Chemin et lacet)

On appelle chemin dans \mathbb{C} toute application continue $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ où $[a, b]$ est un intervalle compact de \mathbb{R} .
 On dit qu'un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est un lacet si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Définition 19 (Intégrale curviligne)

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin de classe \mathcal{C}^1 et f une fonction continue sur $\gamma([a, b])$.
 On définit l'intégrale de f le long de γ par :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt$$

Définition 20 (Indice d'un point par rapport à un lacet)

On définit l'indice d'un point $p \in \mathbb{C}$ par rapport à un lacet γ qui ne passe pas par p , par l'intégrale :

$$I(\gamma, p) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - p}$$

De façon plus claire, l'indice d'un point compte le nombre de boucles effectuées par le chemin autour du point en question, comme l'indique l'illustration ci-dessous.

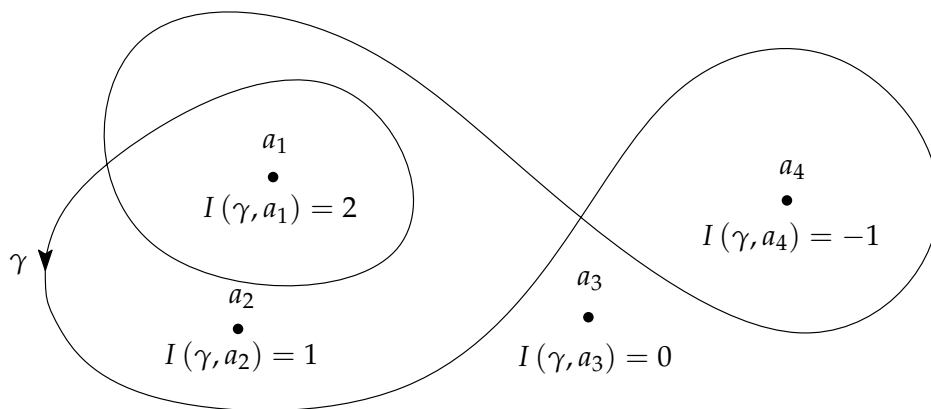


FIGURE 1 – Indices de quelques points par rapport au chemin γ .

Théorème 21 (des résidus)

Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} , et $a_1, \dots, a_r \in \mathcal{U}$. On note $\mathcal{V} = \mathcal{U} \setminus \{a_1, \dots, a_r\}$.
 Soit f une fonction holomorphe sur \mathcal{V} .
 Soit γ un chemin de classe \mathcal{C}^1 , fermé, dans \mathcal{V} , tel que $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{U}, I(\gamma, z) = 0$.
 On a :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{i=1}^r I(\gamma, a_i) \text{Res}(f, a_i)$$

Exemple : On veut calculer $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2} dt$, pour $x \in \mathbb{R}$.

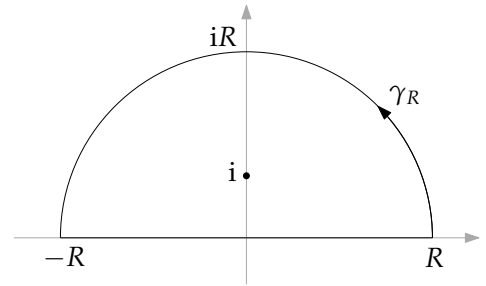
$$I \text{ est paire et } I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Soit } x > 0, \text{ on a : } I(x) = \frac{1}{2} \Re \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{1+t^2} dt \right).$$

La fonction $f : z \mapsto \frac{e^{ixz}}{1+z^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-i, +i\}$, dont les pôles sont d'ordre 1.

On définit γ_R comme sur l'illustration, réunion du demi-cercle supérieur de rayon R centré en l'origine et du segment $[-R, R]$.

Par le théorème des résidus, pour $R > 1$, on a :



$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = 2i\pi \text{Res}(f, i) = 2i\pi \lim_{z \rightarrow i} (z-i)f(z) = 2i\pi \lim_{z \rightarrow i} \frac{e^{ixz}}{z+i} = 2i\pi \frac{e^{-x}}{2i} = \pi e^{-x}$$

Or $\int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{C_R} f(z) dz + \int_{-R}^R f(z) dz$, de plus :

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{e^{ixRe^{i\theta}}}{1+(Re^{i\theta})^2} Rie^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^\pi \frac{e^{\Re(ixRe^{i\theta})}}{|1+(Re^{i\theta})^2|} R d\theta \leq \int_0^\pi \frac{e^{-Rx \sin \theta}}{R^2-1} R d\theta = \frac{2R}{R^2-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rx \sin \theta} d\theta$$

Par concavité, pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $\sin \theta \leq \frac{2}{\pi} \theta$, et ainsi :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rx \sin \theta} d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2Rx}{\pi} \theta} d\theta = \left[\frac{-\pi}{2Rx} e^{-\frac{2Rx}{\pi} \theta} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2Rx} (1 - e^{-Rx})$$

Par conséquent, on obtient la majoration :

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \frac{\frac{\pi}{x} (1 - e^{-Rx})}{R^2 - 1} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

Il en découle $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz$.

Ainsi, pour $x > 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz = \pi e^{-x}$.

Par parité, on obtient finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}$$

Exemple : $\forall \alpha \in]0, 1[$, $I_\alpha := \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi}$

I_α est bien définie car c'est l'intégrale d'une fonction mesurable positive ; on a même $I_\alpha < +\infty$. En effet :

- $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ est continue sur $]0, +\infty[$ (donc localement intégrable) ;

- En 0 : $\frac{1}{t^\alpha(1+t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$, qui est intégrable car $0 < \alpha < 1$;

- En $+\infty$: $\frac{1}{t^\alpha(1+t)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha+1}}$, qui est intégrable car $\alpha + 1 > 1$.

On note $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ et $f : \begin{cases} \Omega \setminus \{-1\} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto \frac{1}{z^\alpha(1+z)} \end{cases}$, où l'on convient $z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$ quand $z = re^{i\theta}$, où

$\theta \in]0, 2\pi[$.

La fonction f est holomorphe sur $\Omega \setminus \{-1\}$ et possède un pôle simple en -1 avec :

$$\text{Res}(f, -1) = \lim_{z \rightarrow -1} (1+z)f(z) = \frac{1}{(-1)^\alpha} = e^{-i\pi\alpha}$$

Pour $0 < \varepsilon < 1 < R$, on définit comme sur l'illustration le chemin $\gamma_{\varepsilon,R} = C_\varepsilon \cup I_\varepsilon^+ \cup \Gamma_{\varepsilon,R} \cup I_\varepsilon^-$, où :

- $C_\varepsilon = \left\{ \varepsilon e^{i\theta} \mid \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right\}$;
- $I_{\varepsilon,R}^+ = [i\varepsilon, i\varepsilon + \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}]$ et $I_{\varepsilon,R}^- = [-i\varepsilon, -i\varepsilon + \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}]$;
- $\Gamma_{\varepsilon,R} = \{ Re^{i\theta} \mid \theta_{\varepsilon,R} \leq |\theta| \leq \pi \}$, avec $\theta_{\varepsilon,R} = \arctan \frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2 - \varepsilon^2}}$.

La théorie des résidus donne donc :

$$\forall 0 < \varepsilon < 1 < R, \int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z) dz = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$$

On va passer à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$ successivement.

Tout d'abord :

$$\left| \int_{C_\varepsilon} f(z) dz \right| = \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(\varepsilon e^{i\theta}) i\varepsilon e^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{|\varepsilon|}{|\varepsilon^\alpha| |1 + \varepsilon e^{i\theta}|} d\theta \leq \pi \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

$$\text{Aussi : } \int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \mathbb{1}_{[\theta_{\varepsilon,R}, 2\pi - \theta_{\varepsilon,R}]}(\theta) \frac{iRe^{i\theta}}{R^\alpha e^{i\alpha\theta} (1 + Re^{i\theta})} d\theta.$$

On veut appliquer le théorème de convergence dominée :

- $\mathbb{1}_{[\theta_{\varepsilon,R}, 2\pi - \theta_{\varepsilon,R}]}(\theta) \frac{iRe^{i\theta}}{R^\alpha e^{i\alpha\theta} (1 + Re^{i\theta})} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}(\theta) \frac{iRe^{i\theta}}{R^\alpha e^{i\alpha\theta} (1 + Re^{i\theta})}$;
- $\left| \mathbb{1}_{[\theta_{\varepsilon,R}, 2\pi - \theta_{\varepsilon,R}]}(\theta) \frac{iRe^{i\theta}}{R^\alpha e^{i\alpha\theta} (1 + Re^{i\theta})} \right| \leq \frac{R^{1-\alpha}}{R-1}$ qui est intégrable sur $[0, 2\pi]$.

Donc :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{iR^{1-\alpha} e^{i(1-\alpha)\theta}}{1 + Re^{i\theta}} d\theta$$

$$\text{De plus : } \int_{I_{\varepsilon,R}^+} f(z) dz = \int_0^{\sqrt{R^2 - \varepsilon^2}} f(i\varepsilon + t) dt = \int_0^{\sqrt{R^2 - \varepsilon^2}} \frac{1}{(t + i\varepsilon)^\alpha (1 + t + i\varepsilon)} dt.$$

Comme $(t + i\varepsilon)^\alpha = \left(\sqrt{t^2 + \varepsilon^2} e^{i \arcsin \frac{\varepsilon}{\sqrt{t^2 + \varepsilon^2}}} \right)^\alpha \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} t^\alpha$, on a :

- $\mathbb{1}_{[0, \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}]}(t) f(i\varepsilon + t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{1}_{[0, R]}(t) f(t)$;
- $\left| \mathbb{1}_{[0, \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}]}(t) f(i\varepsilon + t) \right| \leq \mathbb{1}_{[0, R]}(t) \frac{1}{t^\alpha (1+t)}$ qui est intégrable.

Par théorème de convergence dominée, on déduit :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{I_{\varepsilon,R}^+} f(z) dz = \int_0^R \frac{dt}{t^\alpha (1+t)}$$

Enfin, de la même façon, en utilisant le fait que $(t - i\varepsilon)^\alpha \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} t^\alpha e^{2i\pi\alpha}$, on a :

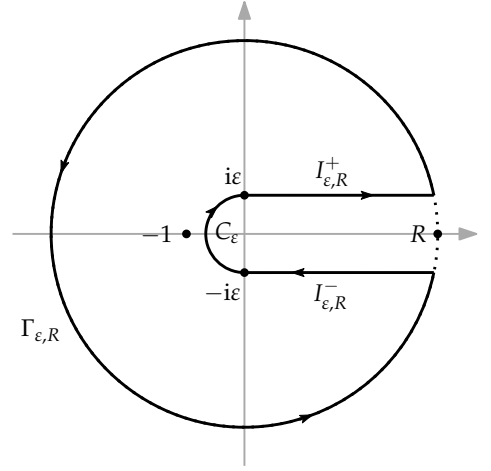
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{I_{\varepsilon,R}^-} f(z) dz = -e^{2i\pi\alpha} \int_0^R \frac{dt}{t^\alpha (1+t)}$$

Finalement,

$$2i\pi e^{-i\pi\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{iR^{1-\alpha} e^{i(1-\alpha)\theta}}{1 + Re^{i\theta}} d\theta + (1 - e^{2i\pi\alpha}) \int_0^R \frac{dt}{t^\alpha (1+t)}$$

On va maintenant faire tendre R vers $+\infty$, par convergence dominée, $\int_0^R \frac{dt}{t^\alpha (1+t)} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} I_\alpha$, en effet :

- $\mathbb{1}_{[0, R]}(t) \frac{1}{t^\alpha (1+t)} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t) \frac{1}{t^\alpha (1+t)}$;
- $\left| \mathbb{1}_{[0, R]}(t) \frac{1}{t^\alpha (1+t)} \right| \leq \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t) \frac{1}{t^\alpha (1+t)}$ qui est intégrable.



D'autre part,

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{iR^{1-\alpha} e^{i(1-\alpha)\theta}}{1 + Re^{i\theta}} d\theta \right| \leq 2\pi \frac{R^{1-\alpha}}{R-1} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

Donc $(1 - e^{-2i\pi\alpha}) I_\alpha = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$, c'est-à-dire :

$$I_\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

Application : Formule des compléments : pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \Re(z) < 1$, $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$.

D'après le théorème des zéros isolés, il suffit de prouver l'égalité pour $z = \alpha \in]0, 1[$. Soit donc $\alpha \in]0, 1[$.
En utilisant le théorème de Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} s^{-\alpha} e^{-s} ds \right) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} s^{-\alpha} t^{\alpha-1} e^{-t-s} dt ds \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{s} \right)^\alpha e^{-(s+t)} ds \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} & \rightarrow & \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \\ (s, t) & \mapsto & (u, v) = \left(s+t, \frac{t}{s} \right) \end{cases} \text{ est un } \mathcal{C}^1\text{-difféomorphisme.}$$

On a : $\varphi^{-1}(u, v) = \left(\frac{u}{v+1}, \frac{uv}{v+1} \right)$ et $|\mathbf{J}\varphi^{-1}(u, v)| = \frac{u}{(v+1)^2} = \frac{t}{v(v+1)}$. On en déduit donc :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} v^{-\alpha} e^{-u} \frac{du dv}{v(v+1)} = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{v^{1-\alpha}(v+1)} du dv = \int_0^{+\infty} \frac{dv}{v^{1-\alpha}(v+1)} \\ &= \frac{\pi}{\sin \pi(1-\alpha)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \end{aligned}$$

4 Calcul approché d'intégrales

Les méthodes abordées jusqu'ici permettent de calculer la valeur exacte d'une intégrale. Ces méthodes sont cependant parfois mises en défaut ; par exemple, c'est le cas si on souhaite calculer la valeur de $\int_0^1 e^{-x^2} dx$. On va alors utiliser d'autres méthodes, fournissant une valeur approchée cette fois-ci, afin d'obtenir une idée de la valeur de l'intégrale qu'on cherche à calculer.

4.1 Méthodes des rectangles [Dem06]

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $a = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_k = b$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$. La formule de Chasles nous fournit l'égalité suivante :

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} f(x) dx$$

Pour les méthodes simples, on choisit un point $\xi_i \in [\sigma_i, \sigma_{i+1}]$ et on remplace f sur $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$ par la fonction constante égale $f(\xi_i)$. On réalise alors l'approximation :

$$\int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} f(x) dx \simeq (\sigma_{i+1} - \sigma_i) f(\xi_i)$$

Donc on approxime l'intégrale par une somme de Riemann relative à la subdivision pointée (σ, ξ) :

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{k-1} (\sigma_{i+1} - \sigma_i) f(\xi_i)$$

Le théorème 12 (dont l'énoncé est en page 8) assure que quand le pas de la subdivision σ tend vers zéro, la somme de Riemann associée tend bien vers l'intégrale de f sur le segment $[a, b]$.

Selon la valeur choisie du point $\xi_i \in [\sigma_i, \sigma_{i+1}]$, on obtient diverses méthodes d'approximation :

– Si $\xi_i = \sigma_i$, on obtient la méthode des rectangles à gauche : $\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{k-1} (\sigma_{i+1} - \sigma_i) f(\sigma_i)$.

On dit que c'est une méthode d'ordre 0 car elle est exacte si f est une fonction polynomiale constante, mais a priori inexacte si f est une fonction polynomiale de degré 1.

– Si $\xi_i = \sigma_{i+1}$, on obtient la méthode des rectangles à droite : $\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{k-1} (\sigma_{i+1} - \sigma_i) f(\sigma_{i+1})$.

C'est également une méthode d'ordre 0.

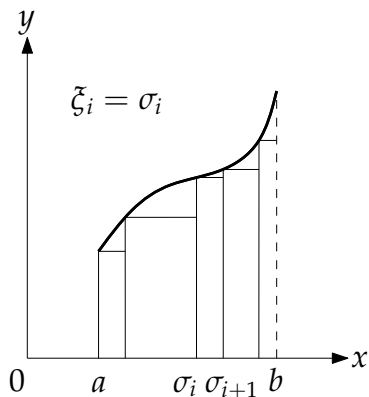


FIGURE 2 – Méthode des rectangles à gauche.

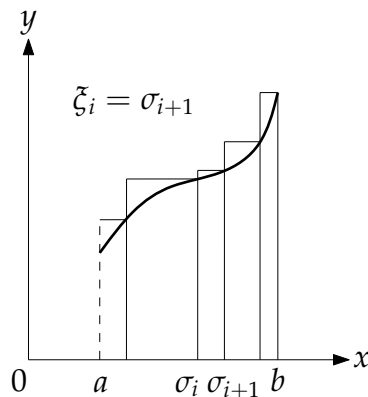


FIGURE 3 – Méthode des rectangles à droite.

– Si $\xi_i = \frac{\sigma_i + \sigma_{i+1}}{2}$, on obtient la méthode du point milieu :

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{i=0}^{k-1} (\sigma_{i+1} - \sigma_i) f\left(\frac{\sigma_i + \sigma_{i+1}}{2}\right)$$

En revanche, c'est une méthode d'ordre 1.

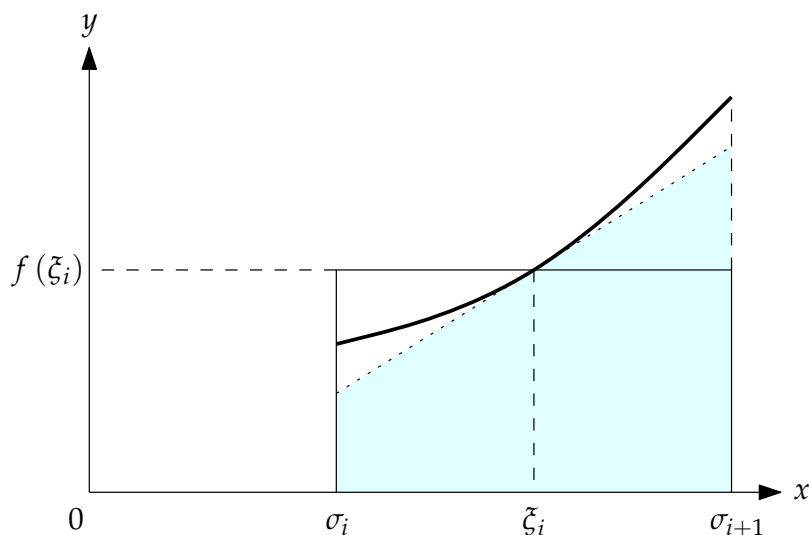


FIGURE 4 – Méthode du point milieu. L'aire du rectangle coïncide avec l'aire du trapèze rempli en bleu.

Exemple : Cherchons à approcher l'intégrale de e^{-x^2} sur le segment $[0, 1]$.

Étant donné que la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est décroissante sur $[0, 1]$, la méthode des rectangles à gauche va sur-estimer la valeur de l'intégrale et la méthode des rectangles à droite va la sous-estimer.

On consigne dans le tableau ci-dessous les résultats fournis par Mathematica pour différentes valeurs de n quand on calcule :

- $g_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$ calcul approché par la méthode des rectangles à gauche ;
- $d_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\left(\frac{k+1}{n}\right)^2}$ calcul approché par la méthode des rectangles à droite ;
- $m_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\left(\frac{k+\frac{1}{2}}{n}\right)^2}$ calcul approché par la méthode du point milieu ;
- $\Delta_n = g_n - d_n$ l'écart entre les approximations obtenues par les méthodes des rectangles à gauche et à droite.

	g_n	d_n	m_n	Δ_n
$n = 10$	0,777 816 824	0,714 604 768	0,747 130 878	0,063 212 056
$n = 100$	0,749 978 604	0,743 657 399	0,746 827 198	0,006 321 205
$n = 1\ 000$	0,747 140 132	0,746 508 011	0,746 824 163	0,000 632 121
$n = 10\ 000$	0,746 855 738	0,746 792 526	0,746 824 133	0,000 063 212

FIGURE 5 – Calculs approchés de $\int_0^1 e^{-x^2} dx$; les résultats fournis sont arrondis à 10^{-9} .

4.2 Méthode de quadrature de Gauss [Rom05]

Définition 22 (Fonction poids)

Soit π une fonction continue sur $]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, à valeurs réelles strictement positives et telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \int_a^b |x^k| \pi(x) dx < +\infty$$

Une telle fonction π est appelée fonction poids sur $]a, b[$.

Soit π une fonction poids sur $]a, b[$, on cherche des familles $(\lambda_{n,k})$ et $(x_{n,k})$ telles que :

$$\forall n \geq 1, \forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \int_a^b P(x)\pi(x) dx = \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k} P(x_{n,k}) \quad (1)$$

Lemme 23

L'espace vectoriel :

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}(]a, b[) \mid \int_a^b f^2(x)\pi(x) dx < +\infty \right\}$$

est muni du produit scalaire

$$\langle f \mid g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\pi(x) dx$$

On note alors (P_n) la suite de polynômes orthonormaux associée à la fonction poids π , vérifiant $\deg P_n = n$ et $\langle P_n \mid P_n \rangle = 1$. On note $P_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k^{(n)} X^k$, avec $\alpha_n^{(n)} > 0$.

Proposition 24

Il existe une famille de coefficients $(\lambda_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$ vérifiant (1) si, et seulement si, les $(x_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$ sont les n racines du polynôme P_n .

Dans ce cas, on a de plus l'unicité des coefficients $(\lambda_{n,k})_{1 \leq k \leq n}$, ils sont donnés par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_{n,k} = \frac{\alpha_n^{(n)}}{\alpha_{n-1}^{(n-1)}} \frac{1}{P_n'(x_{n,k}) P_{n-1}(x_{n,k})}$$

On définit alors des applications linéaires φ_n , définies sur $\mathcal{C}(]a, b[)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\forall f \in \mathcal{C}(]a, b[), \varphi_n(f) = \sum_{k=1}^n \lambda_{n,k} f(x_{n,k})$$

où les coefficients $\lambda_{n,k}$ et $x_{n,k}$ sont définis dans la proposition précédente.

Quand de plus $\int_a^b |f(x)|\pi(x) dx < +\infty$, on peut réaliser l'approximation suivante :

$$\varphi_n(f) \simeq \int_a^b f(x)\pi(x) dx$$

Cette méthode est d'ordre $2n - 1$.

Proposition 25 (Majoration de l'erreur)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons f de classe \mathcal{C}^{2n} sur $]a, b[$, $\int_a^b |f(x)|\pi(x) dx < +\infty$ et $f^{(2n)}$ bornée sur $]a, b[$.

Alors on dispose de la majoration de l'erreur liée à l'approximation $\varphi_n(f) \simeq \int_a^b f(x)\pi(x) dx$:

$$\left| \int_a^b f(x)\pi(x) dx - \varphi_n(f) \right| \leq \frac{\|f^{(2n)}\|_\infty}{(2n)! \left(\alpha_n^{(n)}\right)^2}$$

Exemple : Polynômes de Tchebychev

On pose ici $\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, définie sur l'intervalle $] -1, 1[$.

C'est une fonction poids :

- π est positive et continue sur $] -1, 1[$;
- Pour $k \in \mathbb{N}$, comme sur $] -1, 1[$, $|x^k| \leq 1$, on a : $\int_{-1}^1 |x^k| \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi < +\infty$.

On définit la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \\ P_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n \arccos x) \quad \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Vérifions qu'il s'agit bien de la suite de polynômes orthogonaux associés à π :

- Posons, pour $x \in] -1, 1[$, $\theta = \arccos(x)$; dès lors : $P_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n\theta)$. Alors, pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} [\cos(n\theta) \cos(\theta) - \sin(n\theta) \sin(\theta)] \\ P_{n-1}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} [\cos(n\theta) \cos(\theta) + \sin(n\theta) \sin(\theta)] \\ \hline P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) &= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n\theta) \cos(\theta) \\ &= 2xP_n(x) \end{aligned}$$

Par récurrence, comme $P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ et $P_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}x$, on montre aisément que P_n est une fonction polyno-

miale de degré n et dont le coefficient dominant est donné par :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} & \text{si } n = 0 \\ 2^{n-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

- Par changement de variable, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \cos(n \arccos(x)) \cos(m \arccos(x)) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)}{2} d\theta \end{aligned}$$

Or, pour $\alpha \in \mathbb{Z}^*$, $\int_0^\pi \cos(\alpha\theta) d\theta = \left[\frac{\sin(\alpha\theta)}{\alpha} \right]_0^\pi = 0$.

D'où $\int_{-1}^1 \cos(n \arccos(x)) \cos(m \arccos(x)) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi & \text{si } n = m = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m \geq 1 \end{cases}$.

Il en découle que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la famille de polynômes orthonormaux associée à π .

Les racines de P_n sont les $x_{n,k} = \cos(\theta_{n,k})$ où $\theta_{n,k} = \frac{2k-1}{2n}\pi, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Ainsi, pour $n \geq 2$:

$$\begin{cases} P'_n(x_{n,k}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(n\theta_{n,k}) \frac{n}{\sqrt{1-x_{n,k}^2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n(-1)^{k+1}}{\sin(\theta_{n,k})} \\ P_{n-1}(x_{n,k}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{2} - \theta_{n,k}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-1)^{k+1} \sin(\theta_{n,k}) \end{cases}$$

Et donc, pour $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n$, $\lambda_{n,k} = \frac{2^{n-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \pi}{2^{n-2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2n} = \frac{\pi}{n}$.

Et la formule de quadrature correspondante est donc :

$$\int_{-1}^1 f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \simeq \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right)$$

Application : Cherchons à approcher l'intégrale de $\frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}$ sur le segment $[-1, 1]$.

$f := \exp$ est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)} = \exp$ et donc $\|f^{(n)}\|_\infty = e$.

Dans ce cas, on a l'approximation :

$$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx \simeq \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \exp\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right)$$

On a même une majoration de l'erreur :

$$\left| \int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx - \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \exp\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right) \right| \leq \frac{e}{(2n)! \left(2^{n-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^2} = \frac{\pi e}{(2n)! 4^n}$$

On consigne dans le tableau ci-dessous les résultats fournis par Mathematica pour différentes valeurs de n quand on calcule :

- $\varphi_n(f) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \exp\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right)$ l'approximation de l'intégrale à calculer ;
- $\Delta_n = \frac{\pi e}{(2n)! 4^n}$ la majoration de l'erreur d'approximation ;
- $[g_n; d_n] = [\varphi_n(f) - \Delta_n, \varphi_n(f) + \Delta_n]$ l'intervalle contenant la valeur exacte de l'intégrale.

	$\varphi_n(f)$	Δ_n	$[g_n ; d_n]$
$n = 2$	3,960 266 053	0,022 238 891	[3,938 027 162 ; 3,982 504 944]
$n = 3$	3,977 321 960	0,000 185 324	[3,977 136 636 ; 3,977 507 284]
$n = 4$	3,977 462 635	0,000 000 827	[3,977 461 808 ; 3,977 463 462]
$n = 5$	3,977 463 259	0,000 000 002	[3,977 463 257 ; 3,977 463 261]

FIGURE 6 – Calculs approchés de $\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; les résultats fournis sont arrondis à 10^{-9} .

4.3 Méthode de Monte-Carlo [Tou99]

On veut dans cette sous-section calculer l'intégrale $I = \int f(x)g(x) dx$, où $f \geq 0$ et $\int f(x)dx = 1$.

On peut alors considérer f comme la densité de probabilité d'une variable aléatoire Y et $J = \mathbb{E}[g(Y)]$ sera alors approchée par la moyenne empirique de n réalisations de la variable aléatoire $X = g(Y)$.

Théorème 26 (Loi des grands nombres)

On suppose que (X_i) est une famille de variables aléatoires réelles identiquement distribuées possédant un moment d'ordre 1. On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Alors on a :

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}[X_1]$$

Théorème 27 (central limite)

On suppose que (X_i) est une famille de variables aléatoires réelles identiquement distribuées possédant un moment d'ordre 2, de variance $\sigma^2 > 0$. On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

Alors on a :

$$\frac{S_n - n\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Dans notre cas, on suppose que X admet un moment d'ordre 2; on note $\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$.

Temporairement, imaginons qu'on en connaisse la variance. Ainsi, on a le résultat suivant :

$$\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}} (\bar{X}_n - \mathbb{E}[X]) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Ceci se réécrit alors pour tout $z \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sqrt{\frac{n}{\sigma^2}} (\bar{X}_n - \mathbb{E}[X]) \leq z \right) = \Phi(z)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Or, pour $z > 0$, on a : $\mathbb{P} \left(|\bar{X}_n - \mathbb{E}[X]| \leq z \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \right) = \Phi(z) - \Phi(-z) = 2\Phi(z) - 1$, par symétrie de la

loi normale centrée réduite. Des valeurs habituelles sont $z = 1,96$ et $2\Phi(z) - 1 \simeq 0,95$.

On en déduit alors un intervalle de confiance asymptotique à 95%, pour "n grand" :

$$I \in \left[\bar{X}_n - 1,96 \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}; \bar{X}_n + 1,96 \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \right]$$

Cependant, on ne connaît pas toujours la valeur de la variance de X .

Théorème 28 (Slutsky)

Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires.

Si $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ et si $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} c \in \mathbb{R}$,

Alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} (X, c)$

En l'occurrence, il est possible de montrer que :

$$S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \sigma^2$$

D'après le théorème de Slutsky, on a :

$$\sqrt{\frac{n}{S_n^2}} (\bar{X}_n - \mathbb{E}[X]) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Et en opérant comme dans le cas où la variance de X était supposée connue, on obtient alors l'intervalle de confiance à 95%, où n est supposé "grand" :

$$I \in \left[\bar{X}_n - 1,96 \sqrt{\frac{S_n^2}{n}}; \bar{X}_n + 1,96 \sqrt{\frac{S_n^2}{n}} \right]$$

Exemple : Cherchons à approcher l'intégrale de $\frac{e^{-x}}{\sqrt[4]{x}}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Soit $Y \sim \mathcal{E}(1)$, une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, de densité $f(x) = e^{-x}$.

On pose $X = \sqrt[4]{Y}$.

On sait que X possède un moment d'ordre 2, en effet, par un changement de variable, et en utilisant un argument de parité et la valeur de l'intégrale de Gauss (dont le calcul a été présenté en page 7) :

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{Y}}\right] = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-r^2}}{r} 2r dr = 2 \int_0^{+\infty} e^{-r^2} dr = \sqrt{\pi}$$

On consigne dans le tableau ci-dessous les résultats fournis par Scilab pour différentes valeurs de n quand on calcule :

- \bar{X}_n l'approximation par moyenne empirique de l'intégrale à calculer ;
- S_n^2 l'approximation de la variance de X ;
- $IC_n = \left[\bar{X}_n - 1,959\,964 \sqrt{\frac{S_n^2}{n}}; \bar{X}_n + 1,959\,964 \sqrt{\frac{S_n^2}{n}} \right]$ l'intervalle de confiance asymptotique à 95%.

	\bar{X}_n	S_n^2	IC_n
$n = 100$	1,331 251	0,567 910	[1,183 549 ; 1,478 954]
$n = 1\,000$	1,214 931	0,305 391	[1,180 679 ; 1,249 182]
$n = 10\,000$	1,216 932	0,221 822	[1,207 701 ; 1,226 163]
$n = 100\,000$	1,226 414	0,280 001	[1,223 135 ; 1,229 694]
$n = 1\,000\,000$	1,225 289	0,271 862	[1,224 267 ; 1,226 311]

FIGURE 7 – Calculs approchés de $\int_{-1}^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt[4]{x}} dx$; les résultats fournis sont arrondis à 10^{-6} .

Références

- [AM04] E. AMAR et E. MATHERON – *Analyse complexe*, Cassini, 2004.
- [BMP05] V. BECK, J. MALICK et G. PEYRÉ – *Objectif agrégation*, 2^e éd., H&K, 2005.
- [BP12] M. BRIANE et G. PAGÈS – *Théorie de l'intégration*, 5^e éd., Vuibert, 2012.
- [Dem06] J.-P. DEMAILLY – *Analyse numérique et équations différentielles*, 3^e éd., EDP Sciences, 2006.
- [Gou08] X. GOURDON – *Les maths en tête : analyse*, 2^e éd., Ellipses, 2008.
- [Rom05] J.-E. ROMBALDI – *Interpolation & Approximation*, Vuibert, 2005.
- [Tou99] P. S. TOULOUSE – *Thèmes de probabilités et statistiques*, Dunod, 1999.