Du mouvement brownien aux équations différentielles stochastiques rétrogrades

Florian Lemonnier

Institut de recherche mathématique de Rennes
Université Rennes 1, France

Séminaire étudiant
Toulouse, 15 mars 2018

Le théorème de Donsker

Soient ξ_1, ..., ξ_n, ... des vaiid valant $+1$ ou -1 avec probabilité $\frac{1}{2}$.
On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$,

$$S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n.$$

On étend S en un processus à valeurs réelles en posant :

$$S_t = (1 - \{t\})S_{\lfloor t \rfloor} + \{t\}S_{\lfloor t \rfloor + 1},$$

puis on définit une suite de processus $S^{(n)}$ par :

$$S_t^{(n)} = \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}},$$

pour $t \in [0, 1]$.

Le théorème de Donsker

Soient ξ_1, ..., ξ_n, ... des vaiid valant $+1$ ou -1 avec probabilité $\frac{1}{2}$.
On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$,

$$S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n.$$

On étend S en un processus à valeurs réelles en posant :

$$S_t = (1 - \{t\})S_{\lfloor t \rfloor} + \{t\}S_{\lfloor t \rfloor + 1},$$

puis on définit une suite de processus $S^{(n)}$ par :

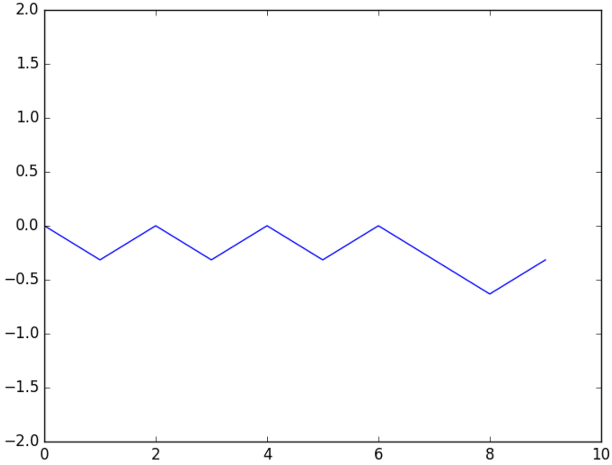
$$S_t^{(n)} = \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}},$$

pour $t \in [0,1]$.

Théorème (Donsker, 51)

La suite $(S^{(n)})_n$ converge en loi dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ vers une limite notée B et appelée "mouvement brownien".

Le théorème de Donsker



Le théorème de Donsker

Soient ξ_1, ..., ξ_n, ... des vaiid valant $+1$ ou -1 avec probabilité $\frac{1}{2}$.

$$S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n \quad ; \quad S_t = (1-\{t\})S_{\lfloor t \rfloor} + \{t\}S_{\lfloor t \rfloor + 1} \quad ; \quad S_t^{(n)} = \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}.$$

Théorème (Donsker, 51)

La suite $(S^{(n)})_n$ converge en loi dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ vers une limite notée B et appelée "mouvement brownien".

$S^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} B$ signifie :

$$\forall f \in \mathcal{C}_b(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\mathbb{R}),\ \mathbb{E}[f(S^{(n)})] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f(B)].$$

Le théorème de Donsker

Soient ξ_1, ..., ξ_n, ... des vaiid valant $+1$ ou -1 avec probabilité $\frac{1}{2}$.

$$S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n \quad ; \quad S_t = (1-\{t\})S_{\lfloor t \rfloor} + \{t\}S_{\lfloor t \rfloor + 1} \quad ; \quad S_t^{(n)} = \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}.$$

Théorème (Donsker, 51)

La suite $(S^{(n)})_n$ converge en loi dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ vers une limite notée B et appelée "mouvement brownien".

$S^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} B$ signifie :

$$\forall f \in \mathcal{C}_b(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\mathbb{R}),\ \mathbb{E}[f(S^{(n)})] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f(B)].$$

Quelques propriétés du mouvement brownien

1. $B_0 = 0$ ps ;

Le théorème de Donsker

Soient ξ_1, ..., ξ_n, ... des vaiid valant $+1$ ou -1 avec probabilité $\frac{1}{2}$.

$$S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n \quad ; \quad S_t = (1-\{t\})S_{\lfloor t \rfloor} + \{t\}S_{\lfloor t \rfloor + 1} \quad ; \quad S_t^{(n)} = \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}.$$

Théorème (Donsker, 51)

La suite $(S^{(n)})_n$ converge en loi dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ vers une limite notée B et appelée "mouvement brownien".

$S^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} B$ signifie :

$$\forall f \in \mathcal{C}_b(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\mathbb{R}),\ \mathbb{E}[f(S^{(n)})] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f(B)].$$

Quelques propriétés du mouvement brownien

1. $B_0 = 0$ ps ;
2. $t \mapsto B_t$ est ps continue ;

Le théorème de Donsker

Soient ξ_1, ..., ξ_n, ... des vaiid valant $+1$ ou -1 avec probabilité $\frac{1}{2}$.

$$S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n \quad ; \quad S_t = (1 - \{t\}) S_{\lfloor t \rfloor} + \{t\} S_{\lfloor t \rfloor + 1} \quad ; \quad S_t^{(n)} = \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}.$$

Théorème (Donsker, 51)

La suite $(S^{(n)})_n$ converge en loi dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ vers une limite notée B et appelée "mouvement brownien".

$S^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} B$ signifie :

$$\forall f \in \mathcal{C}_b(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\mathbb{R}),\ \mathbb{E}[f(S^{(n)})] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[f(B)].$$

Quelques propriétés du mouvement brownien

1. $B_0 = 0$ ps ;
2. $t \mapsto B_t$ est ps continue ;
3. $\forall 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k$, les va $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$.

Le théorème de Donsker

Soient ξ_1, ..., ξ_n, ... des vaiid valant $+1$ ou -1 avec probabilité $\frac{1}{2}$.

$$S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n \quad ; \quad S_t = (1 - \{t\}) S_{\lfloor t \rfloor} + \{t\} S_{\lfloor t \rfloor + 1} \quad ; \quad S_t^{(n)} = \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}.$$

Théorème (Donsker, 51)

La suite $(S^{(n)})_n$ converge en loi dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ vers une limite notée B et appelée "mouvement brownien".

$S^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} B$ signifie :

$$\forall f \in \mathcal{C}_b(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\mathbb{R}),\ \mathbb{E}[f(S^{(n)})] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f(B)].$$

Quelques propriétés du mouvement brownien

1. $B_0 = 0$ ps ;
2. $t \mapsto B_t$ est ps continue ;
3. $\forall 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k$, les va $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$.

Ces trois propriétés caractérisent le mouvement brownien.

L'intégrale de Stieltjes

Soit $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue à droite, Δ la subdivision $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ de pas $|\Delta| = \sup_i |t_{i+1} - t_i|$. On pose $S_t^\Delta = \sum_i |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}|$.

L'intégrale de Stieltjes

Soit $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue à droite, Δ la subdivision $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ de pas $|\Delta| = \sup_i |t_{i+1} - t_i|$. On pose

$$S_t^\Delta = \sum_i |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}|.$$

Définition

A est dite "à variation finie" si pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$S_t = \sup_\Delta S_t^\Delta < \infty.$$

S est la variation totale de A ; c'est une fonction positive et croissante.

L'intégrale de Stieltjes

Soit $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue à droite, Δ la subdivision $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ de pas $|\Delta| = \sup_i |t_{i+1} - t_i|$. On pose

$$S_t^\Delta = \sum_i |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}|.$$

Définition

A est dite "à variation finie" si pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$S_t = \sup_\Delta S_t^\Delta < \infty.$$

S est la variation totale de A ; c'est une fonction positive et croissante.

Par exemple, les fonctions $\mathcal{C}^1$ sont à variation finie.

L'intégrale de Stieltjes

Soit $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue à droite, Δ la subdivision $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ de pas $|\Delta| = \sup_i |t_{i+1} - t_i|$. On pose

$$S_t^\Delta = \sum_i |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}|.$$

Définition

A est dite "à variation finie" si pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$S_t = \sup_\Delta S_t^\Delta < \infty.$$

S est la variation totale de A ; c'est une fonction positive et croissante.

Par exemple, les fonctions $\mathcal{C}^1$ sont à variation finie.

Proposition

Les fonctions à variation finie peuvent s'écrire comme différence de deux fonctions croissantes.

L'intégrale de Stieltjes

$$S_t^\Delta = \sum_i |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}|$$

Définition

A "à variation finie" $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+,\ S_t = \sup_\Delta S_t^\Delta < \infty$.

Par exemple, les fonctions $\mathcal{C}^1$ sont à variation finie.

Proposition

Les fonctions à variation finie peuvent s'écrire comme différence de deux fonctions croissantes.

Théorème

Il existe une correspondance bijective entre les mesures de Radon μ *sur* $\mathbb{R}_+$ *et les fonctions continues à droite A à variation finie, donnée par :*

$$A_t = \mu([0,t]).$$

L'intégrale de Stieltjes

$$S_t^\Delta = \sum_i |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}|$$

Définition

A "à variation finie" $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+,\ S_t = \sup_\Delta S_t^\Delta < \infty$.

Proposition

Les fonctions à variation finie peuvent s'écrire comme différence de deux fonctions croissantes.

Théorème

Il existe une correspondance bijective entre les mesures de Radon μ sur $\mathbb{R}_+$ et les fonctions continues à droite A à variation finie, donnée par :

$$A_t = \mu([0,t]).$$

Ceci permet de définir $\int_0^t f_s \,\mathrm{d}A_s := \int_{]0,t]} f_s \,\mu(\mathrm{d}s)$.

Le mouvement brownien est-il à variation finie ?

On définit $\langle B\rangle_t^\Delta := \sum_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2$. On remarque que :

$$\mathbb{E}[\langle B\rangle_t^\Delta] = \sum_i \mathbb{E}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2]$$

Le mouvement brownien est-il à variation finie ?

On définit $\langle B \rangle_t^\Delta := \sum_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2$. On remarque que :

$$\mathbb{E}[\langle B \rangle_t^\Delta] = \sum_i \mathbb{E}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] = \sum_i (t_{i+1} - t_i)$$

Le mouvement brownien est-il à variation finie ?

On définit $\langle B\rangle_t^\Delta := \sum_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2$. On remarque que :

$$\mathbb{E}[\langle B\rangle_t^\Delta] = \sum_i \mathbb{E}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] = \sum_i (t_{i+1} - t_i) = t.$$

Le mouvement brownien est-il à variation finie ?

On définit $\langle B\rangle_t^\Delta := \sum_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2$. On remarque que :

$$\mathbb{E}[\langle B\rangle_t^\Delta] = \sum_i \mathbb{E}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] = \sum_i (t_{i+1} - t_i) = t.$$

Or :

$$\sum_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2 \leq \sum_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| \sup_k |B_{t_{k+1}} - B_{t_k}|.$$

Le mouvement brownien est-il à variation finie ?

On définit $\langle B\rangle_t^\Delta := \sum_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2$. On remarque que :

$$\mathbb{E}[\langle B\rangle_t^\Delta] = \sum_i \mathbb{E}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] = \sum_i (t_{i+1} - t_i) = t.$$

Or :

$$\underbrace{\sum_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2}_{\neq 0} \leq \sum_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| \sup_k |B_{t_{k+1}} - B_{t_k}|.$$

Le mouvement brownien est-il à variation finie ?

On définit $\langle B\rangle_t^\Delta := \sum_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2$. On remarque que :

$$\mathbb{E}[\langle B\rangle_t^\Delta] = \sum_i \mathbb{E}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] = \sum_i (t_{i+1} - t_i) = t.$$

Or :

$$\underbrace{\sum_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2}_{\neq 0} \leq \sum_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| \underbrace{\sup_k |B_{t_{k+1}} - B_{t_k}|}_{\underset{|\Delta|\to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ ps}}.$$

Le mouvement brownien est-il à variation finie ?

On définit $\langle B\rangle_t^\Delta := \sum_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2$. On remarque que :

$$\mathbb{E}[\langle B\rangle_t^\Delta] = \sum_i \mathbb{E}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] = \sum_i (t_{i+1} - t_i) = t.$$

Or :

$$\underbrace{\sum_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2}_{\neq 0} \leq \sum_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| \underbrace{\sup_k |B_{t_{k+1}} - B_{t_k}|}_{\underset{|\Delta|\to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ ps}}.$$

Donc le mouvement brownien n'est pas à variation ps finie...

Le mouvement brownien est-il à variation finie ?

On définit $\langle B\rangle_t^\Delta := \sum_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2$. On remarque que :

$$\mathbb{E}[\langle B\rangle_t^\Delta] = \sum_i \mathbb{E}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] = \sum_i (t_{i+1} - t_i) = t.$$

Or :

$$\underbrace{\sum_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2}_{\neq 0} \leq \sum_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| \underbrace{\sup_k |B_{t_{k+1}} - B_{t_k}|}_{\underset{|\Delta|\to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ ps}}.$$

Donc le mouvement brownien n'est pas à variation ps finie...
Mais à variation quadratique ps finie !

L'intégrale d'Itô

Définition (Processus élémentaires)

On définit l'ensemble $\mathcal{E}$ des processus X pouvant s'écrire sous la forme :

$$\forall t \in [a,b], \forall \omega \in \Omega, X_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} Z_i(\omega) \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(t),$$

et où les variables Y_i sont $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables.

L'intégrale d'Itô

Définition (Processus élémentaires)

On définit l'ensemble $\mathcal{E}$ des processus X pouvant s'écrire sous la forme :

$$\forall t \in [a,b], \forall \omega \in \Omega, X_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} Z_i(\omega) \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(t),$$

et où les variables Y_i sont $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurables.

Définition

On définit l'intégrale de $X_\bullet = \sum_{i=0}^{n-1} Z_i \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(\bullet) \in \mathcal{E}$ contre B par :

$$\int_a^b X_s(\omega)\, dB_s(\omega) := \sum_{i=0}^{n-1} Z_i(\omega) \left(B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega) \right).$$

L'intégrale d'Itô

Définition

On définit l'intégrale de $X_\bullet = \sum_{i=0}^{n-1} Z_i \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(\bullet) \in \mathcal{E}$ *contre* B *par :*

$$\int_a^b X_s(\omega)\, dB_s(\omega) := \sum_{i=0}^{n-1} Z_i(\omega) \left(B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega) \right).$$

Définition

Soit X *progressivement mesurable ; on dit* $X \in \Lambda^2 \Leftrightarrow \int_a^b X_s^2\, ds < \infty$ *ps.*

L'intégrale d'Itô

Définition

On définit l'intégrale de $X_\bullet = \sum_{i=0}^{n-1} Z_i \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(\bullet) \in \mathcal{E}$ *contre* B *par :*

$$\int_a^b X_s(\omega)\, dB_s(\omega) := \sum_{i=0}^{n-1} Z_i(\omega) \left(B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega) \right).$$

Définition

Soit X *progressivement mesurable ; on dit* $X \in \Lambda^2 \Leftrightarrow \int_a^b X_s^2\, ds < \infty$ *ps.*

Proposition

Tout élément de Λ^2 *est limite d'éléments de* $\mathcal{E}$ *; on définit l'intégrale contre* B *des éléments de* Λ^2 *par densité.*

L'intégrale d'Itô

Proposition

Soient $X, Y \in \Lambda^2$, *on a :*

- $\displaystyle\int_a^b (\lambda X_s + \mu Y_s)\, dB_s = \lambda \int_a^b X_s\, dB_s + \mu \int_a^b Y_s\, dB_s$;

et si $\mathbb{E}\left[\displaystyle\int_a^b X_s^2\, ds\right] < \infty$ *et* $\mathbb{E}\left[\displaystyle\int_a^b Y_s^2\, ds\right] < \infty$, *alors*

- $\mathbb{E}\left[\displaystyle\int_a^b X_s\, dB_s\right] = 0$;
- $\mathbb{E}\left[\displaystyle\int_a^b X_s\, dB_s \int_a^b Y_s\, dB_s\right] = \mathbb{E}\left[\displaystyle\int_a^b X_s Y_s\, ds\right]$.

Processus d'Itô, Calcul d'Itô

Définition

On dit que X est un processus d'Itô si il existe a et b dans Λ^2 tels que :

$$dX_t = a_t\,dt + b_t\,dB_t.$$

Processus d'Itô, Calcul d'Itô

Définition

On dit que X est un processus d'Itô si il existe a et b dans Λ^2 tels que :

$$dX_t = a_t\, dt + b_t\, dB_t.$$

Proposition (Intégration par parties)

Si $dX_t = a_t^1\, dt + b_t^1\, dB_t$ et $dY_t = a_t^2\, dt + b_t^2\, dB_t$, alors :

$$d(X_t Y_t) = X_t\, dY_t + Y_t\, dX_t + b_t^1 b_t^2\, dt.$$

Processus d'Itô, Calcul d'Itô

Définition

On dit que X est un processus d'Itô si il existe a et b dans Λ^2 tels que :

$$dX_t = a_t\, dt + b_t\, dB_t.$$

Proposition (Intégration par parties)

Si $dX_t = a^1_t\, dt + b^1_t\, dB_t$ et $dY_t = a^2_t\, dt + b^2_t\, dB_t$, alors :

$$d(X_t Y_t) = X_t\, dY_t + Y_t\, dX_t + b^1_t b^2_t\, dt.$$

Théorème (Formule d'Itô)

Si $dX_t = a_t\, dt + b_t\, dB_t$ et $f \in \mathcal{C}^{1,2}$, alors :

$$df(t, X_t) = \partial_t f(t, X_t)\, dt + \partial_x f(t, X_t)\, dX_t + \frac{1}{2}\partial^2_{xx} f(t, X_t)|b_t|^2\, dt.$$

Ça ressemble à quoi une EDS ?

Une ED, c'est ça :

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = b(t, X_t)\,\mathrm{d}t \\ X_0 = x \end{cases}$$

On dit que la fonction X est une solution de l'ED sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}_+$ contenant 0 quand X est continue et :

$$\begin{cases} \forall t \in I, \int_0^t b(s, X_s)\,\mathrm{d}s \text{ est bien définie} \\ \forall t \in I, X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\,\mathrm{d}s \end{cases}$$

Ça ressemble à quoi une EDS ?

Une EDS, c'est ça :

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = b(t, X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\,\mathrm{d}B_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

On dit que le processus X est une solution de l'EDS sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}_+$ contenant 0 quand X est continu, adapté à B et :

$$\begin{cases} \forall t \in I,\ \int_0^t |b(s, X_s)|\,\mathrm{d}s + \int_0^t |\sigma(s, X_s)|^2\,\mathrm{d}s < \infty \text{ ps} \\ \forall t \in I,\ X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,\mathrm{d}B_s \text{ ps} \end{cases}$$

Ça ressemble à quoi une EDS ?

Une EDS, c'est ça :

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = b(t, X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\,\mathrm{d}B_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

On dit que le processus X est une solution de l'EDS sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}_+$ contenant 0 quand X est continu, adapté à B et :

$$\begin{cases} \forall t \in I,\ \int_0^t |b(s, X_s)|\,\mathrm{d}s + \int_0^t |\sigma(s, X_s)|^2\,\mathrm{d}s < \infty \text{ ps} \\ \forall t \in I,\ X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,\mathrm{d}B_s \text{ ps} \end{cases}$$

Remarque : de façon sous-entendue, on autorise les fonctions b et σ à être aléatoires.

Résolution des EDS

Théorème

Soient $b, \sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *deux fonctions lipschitziennes en espace, uniformément en temps (et en aléa si elles sont aléatoires). Alors l'équation*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

admet une unique solution dans $L^p(\Omega, \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}))$, *pour tous* $p \geq 2$ *et* $T > 0$.

Résolution des EDS

Théorème

Soient $b, \sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *deux fonctions lipschitziennes en espace, uniformément en temps (et en aléa si elles sont aléatoires). Alors l'équation*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

admet une unique solution dans $L^p(\Omega, \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}))$*, pour tous* $p \geq 2$ *et* $T > 0$.

Démonstration.

Utilisation d'un théorème de point fixe. □

Ça ressemble à quoi une EDS rétrograde ?

Pour une EDSR, on aurait envie de poser :

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = f(t, Y_t)\,\mathrm{d}t + g(t, Y_t)\,\mathrm{d}B_t \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

avec ξ une variable $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Ça ressemble à quoi une EDS rétrograde ?

Exemple fondamental : résolvons

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = 0 \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

Ça ressemble à quoi une EDS rétrograde ?

Exemple fondamental : résolvons

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = 0 \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

On a $Y_t = \xi$ pour tout $t \in [0, T]$.

Ça ressemble à quoi une EDS rétrograde ?

Exemple fondamental : résolvons

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = 0 \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

On a $Y_t = \xi$ pour tout $t \in [0, T]$. Ce n'est pas adapté ! On pose $Y'_t = \mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_t]$. Y' est adapté, mais quelle EDSR vérifie-t-il ?

Ça ressemble à quoi une EDS rétrograde ?

Exemple fondamental : résolvons

$$\begin{cases} \mathrm{d}\, Y_t = 0 \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

On a $Y_t = \xi$ pour tout $t \in [0, T]$. Ce n'est pas adapté ! On pose $Y'_t = \mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_t]$. Y' est adapté, mais quelle EDSR vérifie-t-il ?

Théorème (Représentation des martingales browniennes)

Soit M une $(\mathcal{F}_t)$-martingale issue de 0 telle que $\forall t \geq 0$, $\mathbb{E}\left[M_t^2\right] < \infty$.
Alors il existe un unique processus Z progressivement mesurable et tel que pour tout $t \geq 0$:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t |Z_s|^2\, ds\right] < \infty \text{ et } M_t = \int_0^t Z_s\, dB_s.$$

Ça ressemble à quoi une EDS rétrograde ?

Exemple fondamental : résolvons

$$\begin{cases} \mathrm{d}\, Y_t = 0 \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

On a $Y_t = \xi$ pour tout $t \in [0, T]$. Ce n'est pas adapté ! On pose $Y'_t = \mathbb{E}[\xi | \mathcal{F}_t]$. Y' est adapté, mais quelle EDSR vérifie-t-il ?

Théorème (Représentation des martingales browniennes)

Soit M une $(\mathcal{F}_t)$-martingale issue de 0 telle que $\forall t \geq 0$, $\mathbb{E}\left[M_t^2\right] < \infty$.
Alors il existe un unique processus Z progressivement mesurable et tel que pour tout $t \geq 0$:

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t |Z_s|^2 \, ds\right] < \infty \text{ et } M_t = \int_0^t Z_s \, dB_s.$$

Quand $\mathbb{E}[|\xi|^2] < \infty$, on a donc $\mathrm{d}Y'_t = Z_t \,\mathrm{d}B_t$, pour un certain processus Z...

Ça ressemble à quoi une EDS rétrograde ?

Une EDSR, c'est ça :

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = -f(t, Y_t, Z_t)\,\mathrm{d}t + Z_t\,\mathrm{d}B_t \\ Y_T = \xi \end{cases}$$

avec ξ une variable $\mathcal{F}_T$-mesurable de carré intégrable.
On dit que le couple de processus (Y, Z) est solution de l'EDSR sur l'intervalle $[0, T]$ quand Y est continu adapté et Z progressivement mesurable et que :

$$\begin{cases} \int_0^T |f(s, Y_s, Z_s)|\,\mathrm{d}s + \int_0^T |Z_s|^2\,\mathrm{d}s < \infty \text{ ps} \\ Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s\,\mathrm{d}B_s \text{ ps} \end{cases}$$

Théorème fondamental de résolution des EDSR

Théorème (Pardoux, Peng 90 ; El Karoui, Peng, Quénez 97)

On suppose que :

- f *est globalement lipschitzienne en* (y, z) *uniformément en aléa et temps ;*
- $\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(s,0,0)|^2\, ds\right] < \infty.$

Alors l'EDSR admet une unique solution telle que Z *soit de carré intégrable.*

Théorème fondamental de résolution des EDSR

Théorème (Pardoux, Peng 90 ; El Karoui, Peng, Quénez 97)

On suppose que :

- f *est globalement lipschitzienne en* (y, z) *uniformément en aléa et temps ;*
- $\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(s,0,0)|^2\, ds\right] < \infty.$

Alors l'EDSR admet une unique solution telle que Z *soit de carré intégrable.*

Démonstration.

Utilisation d'un théorème de point fixe dans l'espace de Banach

$$\left\{ \mathrm{Y},\ \mathrm{Z} \text{ prog. mes. et } \mathrm{Y} \text{ continu} \,\middle|\, \mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} |Y_t|^2 + \int_0^T |Z_s|^2\, \mathrm{d}s\right] < \infty \right\}.$$

□

Solutions des EDP Hamilton-Jacobi-Bellman

On résout :

$$\begin{cases} X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}r + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}B_r \\ Y_s^{t,x} = g(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})\,\mathrm{d}r - \int_s^T Z_r^{t,x}\,\mathrm{d}B_r \end{cases}$$

Solutions des EDP Hamilton-Jacobi-Bellman

On résout :

$$\begin{cases} X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}r + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}B_r \\ Y_s^{t,x} = g(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})\,\mathrm{d}r - \int_s^T Z_r^{t,x}\,\mathrm{d}B_r \end{cases}$$

Quand b, σ, f sont déterministes, on définit une fonction déterministe par $u(t,x) := Y_t^{t,x}$

Solutions des EDP Hamilton-Jacobi-Bellman

On résout :

$$\begin{cases} X_s^{t,x} = x + \displaystyle\int_t^s b(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}r + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}B_r \\ Y_s^{t,x} = g(X_T^{t,x}) + \displaystyle\int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})\,\mathrm{d}r - \int_s^T Z_r^{t,x}\,\mathrm{d}B_r \end{cases}$$

Quand b, σ, f sont déterministes, on définit une fonction déterministe par $u(t,x) := Y_t^{t,x}$; et par unicité $Y_s^{t,x} = u(s, X_s^{t,x})$.

Solutions des EDP Hamilton-Jacobi-Bellman

On résout :

$$\begin{cases} X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}r + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}B_r \\ Y_s^{t,x} = g(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})\,\mathrm{d}r - \int_s^T Z_r^{t,x}\,\mathrm{d}B_r \end{cases}$$

Quand b, σ, f sont déterministes, on définit une fonction déterministe par $u(t,x) := Y_t^{t,x}$; et par unicité $Y_s^{t,x} = u(s, X_s^{t,x})$. Et si b, σ et f sont suffisamment régulières, alors u est $\mathcal{C}^{1,2}$ et, par la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u(s, X_s^{t,x}) &= \partial_t u(s, X_s^{t,x})\,\mathrm{d}s + \partial_x u(s, X_s^{t,x})\,\mathrm{d}X_s^{t,x} + \frac{1}{2}\partial_{xx}^2 u(s, X_s^{t,x})|\sigma(s, X_s^{t,x})|^2\,\mathrm{d}s \\ &= \{\partial_t u + \partial_x u.b + \frac{1}{2}\partial_{xx}^2 u.|\sigma|^2\}(s, X_s^{t,x})\,\mathrm{d}s + \{\partial_x u.\sigma\}(s, X_s^{t,x})\,\mathrm{d}B_s \\ \mathrm{d}Y_s^{t,x} &= -f(s, X_s^{t,x}, Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x})\,\mathrm{d}s + Z_s^{t,x}\,\mathrm{d}B_s \end{aligned}$$

Solutions des EDP Hamilton-Jacobi-Bellman

On résout :

$$\begin{cases} X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}r + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}B_r \\ Y_s^{t,x} = g(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})\,\mathrm{d}r - \int_s^T Z_r^{t,x}\,\mathrm{d}B_r \end{cases}$$

Quand b, σ, f sont déterministes, on définit une fonction déterministe par $u(t,x) := Y_t^{t,x}$; et par unicité $Y_s^{t,x} = u(s, X_s^{t,x})$. Et si b, σ et f sont suffisamment régulières, alors u est $\mathcal{C}^{1,2}$ et, par la formule d'Itô :

$$\mathrm{d}u(s, X_s^{t,x}) = \partial_t u(s, X_s^{t,x})\,\mathrm{d}s + \partial_x u(s, X_s^{t,x})\,\mathrm{d}X_s^{t,x} + \frac{1}{2}\partial_{xx}^2 u(s, X_s^{t,x})|\sigma(s, X_s^{t,x})|^2\,\mathrm{d}s$$

$$= \{\partial_t u + \partial_x u.b + \frac{1}{2}\partial_{xx}^2 u.|\sigma|^2\}(s, X_s^{t,x})\,\mathrm{d}s + \{\partial_x u.\sigma\}(s, X_s^{t,x})\,\mathrm{d}B_s$$

$$\mathrm{d}Y_s^{t,x} = -f(s, X_s^{t,x}, Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x})\,\mathrm{d}s + Z_s^{t,x}\,\mathrm{d}B_s$$

Donc $Z_s^{t,x} = \partial_x u(s, X_s^{t,x})\sigma(s, X_s^{t,x})$

Solutions des EDP Hamilton-Jacobi-Bellman

On résout :

$$\begin{cases} X_s^{t,x} = x + \int_t^s b(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}r + \int_t^s \sigma(r, X_r^{t,x})\,\mathrm{d}B_r \\ Y_s^{t,x} = g(X_T^{t,x}) + \int_s^T f(r, X_r^{t,x}, Y_r^{t,x}, Z_r^{t,x})\,\mathrm{d}r - \int_s^T Z_r^{t,x}\,\mathrm{d}B_r \end{cases}$$

Quand b, σ, f sont déterministes, on définit une fonction déterministe par $u(t,x) := Y_t^{t,x}$; et par unicité $Y_s^{t,x} = u(s, X_s^{t,x})$. Et si b, σ et f sont suffisamment régulières, alors u est $\mathcal{C}^{1,2}$ et, par la formule d'Itô :

$$\mathrm{d}u(s,X_s^{t,x}) = \partial_t u(s,X_s^{t,x})\,\mathrm{d}s + \partial_x u(s,X_s^{t,x})\,\mathrm{d}X_s^{t,x} + \frac{1}{2}\partial_{xx}^2 u(s,X_s^{t,x})|\sigma(s,X_s^{t,x})|^2\,\mathrm{d}s$$

$$= \{\partial_t u + \partial_x u.b + \frac{1}{2}\partial_{xx}^2 u.|\sigma|^2\}(s,X_s^{t,x})\,\mathrm{d}s + \{\partial_x u.\sigma\}(s,X_s^{t,x})\,\mathrm{d}B_s$$

$$\mathrm{d}Y_s^{t,x} = -f(s,X_s^{t,x},Y_s^{t,x},Z_s^{t,x})\,\mathrm{d}s + Z_s^{t,x}\,\mathrm{d}B_s$$

Donc $Z_s^{t,x} = \partial_x u(s,X_s^{t,x})\sigma(s,X_s^{t,x})$ et

$$\begin{cases} f(t,x,u(t,x),\partial_x u(t,x)\sigma(t,x)) + \partial_t u(t,x) + \{\partial_x u.b + \frac{1}{2}\partial_{xx}^2 u.|\sigma|^2\}(t,x) = 0 \\ u(T,x) = g(x) \end{cases}$$

Convergence vers une EDSR ergodique

On considère un processus X^x satisfaisant

$$X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X_s^x)\,\mathrm{d}B_s, \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

en supposant notamment b et σ Lipschitz, b faiblement dissipatif et $x \mapsto \sigma(x)^{-1}$ bornée.

Convergence vers une EDSR ergodique

On considère un processus X^x satisfaisant

$$X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X_s^x)\,\mathrm{d}B_s, \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

en supposant notamment b et σ Lipschitz, b faiblement dissipatif et $x \mapsto \sigma(x)^{-1}$ bornée.
Soit l'EDSR d'horizon fini T :

$$Y_t^{T,x} = g(X_T^x) + \int_t^T f(X_s^x, Z_s^{T,x})\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{T,x}\,\mathrm{d}B_s, \qquad \forall t \in [0,T],$$

où f est Lipschitzienne par rapport à $(x, z\sigma(x)^{-1})$ et $f(\bullet, 0)$ et g à croissance polynomiale.

Convergence vers une EDSR ergodique

On considère un processus X^x satisfaisant

$$X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X_s^x)\,\mathrm{d}B_s, \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

en supposant notamment b et σ Lipschitz, b faiblement dissipatif et $x \mapsto \sigma(x)^{-1}$ bornée.
Soit l'EDSR d'horizon fini T :

$$Y_t^{T,x} = g(X_T^x) + \int_t^T f(X_s^x, Z_s^{T,x})\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{T,x}\,\mathrm{d}B_s, \qquad \forall t \in [0,T],$$

où f est Lipschitzienne par rapport à $(x, z\sigma(x)^{-1})$ et $f(\bullet, 0)$ et g à croissance polynomiale.
Enfin, on définit l'EDSR ergodique d'inconnue (Y^x, Z^x, λ) :

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T \{f(X_s^x, Z_s^x) - \lambda\}\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^x\,\mathrm{d}B_s, \qquad \forall 0 \le t \le T < \infty.$$

Convergence vers une EDSR ergodique

$$X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X_s^x)\,\mathrm{d}B_s, \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

$$Y_t^{T,x} = g(X_T^x) + \int_t^T f(X_s^x, Z_s^{T,x})\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{T,x}\,\mathrm{d}B_s, \qquad \forall t \in [0,T],$$

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T \{f(X_s^x, Z_s^x) - \lambda\}\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^x\,\mathrm{d}B_s, \qquad \forall 0 \le t \le T < \infty.$$

Théorème (Hu, L. 17)

On dispose des comportements en temps long (i.e. quand $T \to \infty$) suivants :

- ***Ordre 1 :*** $\dfrac{Y_0^{T,x}}{T} \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$ *uniformément sur tout compact de* $\mathbb{R}$ *;*

Convergence vers une EDSR ergodique

$$X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X_s^x)\,\mathrm{d}B_s, \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

$$Y_t^{T,x} = g(X_T^x) + \int_t^T f(X_s^x, Z_s^{T,x})\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{T,x}\,\mathrm{d}B_s, \qquad \forall t \in [0,T],$$

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T \{f(X_s^x, Z_s^x) - \lambda\}\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^x\,\mathrm{d}B_s, \qquad \forall 0 \le t \le T < \infty.$$

Théorème (Hu, L. 17)

On dispose des comportements en temps long (i.e. quand $T \to \infty$) suivants :

- ***Ordre 1 :*** $\dfrac{Y_0^{T,x}}{T} \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$ *uniformément sur tout compact de* $\mathbb{R}$;
- ***Ordre 2 :*** $\exists L \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ Y_0^{T,x} - \lambda T - Y_0^x \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} L$;

Convergence vers une EDSR ergodique

$$X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X_s^x)\,\mathrm{d}B_s, \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

$$Y_t^{T,x} = g(X_T^x) + \int_t^T f(X_s^x, Z_s^{T,x})\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^{T,x}\,\mathrm{d}B_s, \qquad \forall t \in [0,T],$$

$$Y_t^x = Y_T^x + \int_t^T \{f(X_s^x, Z_s^x) - \lambda\}\,\mathrm{d}s - \int_t^T Z_s^x\,\mathrm{d}B_s, \qquad \forall 0 \leq t \leq T < \infty.$$

Théorème (Hu, L. 17)

On dispose des comportements en temps long (i.e. quand $T \to \infty$) suivants :

- ***Ordre 1 :*** $\dfrac{Y_0^{T,x}}{T} \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$ *uniformément sur tout compact de* $\mathbb{R}$ *;*
- ***Ordre 2 :*** $\exists L \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ Y_0^{T,x} - \lambda T - Y_0^x \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} L$ *;*
- ***Ordre 3 :***

$$\exists P \in \mathbb{R}[X], \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, \forall T > 0, |Y_0^{T,x} - \lambda T - Y_0^x - L| \leq P(x)e^{-\alpha T}.$$

Bibliographie

- G. Miermont. *Quelques exemples de théorèmes limites fonctionnels.* [Polycopié en ligne]
- D. Revuz, M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion, 3rd edition.* 1999.
- É. Pardoux, S. Peng. *Adapted solution of a BSDE.* 1990.
- Y. Hu, F. Lemonnier. *Ergodic BSDEs with an unbounded and multiplicative underlying diffusion.* 2017. [arXiv]

Bibliographie

- G. Miermont. *Quelques exemples de théorèmes limites fonctionnels.* [Polycopié en ligne]
- D. Revuz, M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion, 3^rd^ edition.* 1999.
- É. Pardoux, S. Peng. *Adapted solution of a BSDE.* 1990.
- Y. Hu, F. Lemonnier. *Ergodic BSDEs with an unbounded and multiplicative underlying diffusion.* 2017. [arXiv]

Merci pour votre attention.