Le théorème de Lickorish et Wallace

Florian Lemonnier

Stage réalisé en mai-juin 2013

Sous la direction de Vincent Colin, Université de Nantes

02 septembre 2013



Introduction Explication de l'énoncé Piste de démonstration Corollaire

Théorème

Théorème de Lickorish et Wallace

Toute variété close, orientable et connexe de dimension 3 est obtenue par chirurgie de Dehn sur un entrelacs de la sphère S^3 .

Théorème

Théorème de Lickorish et Wallace

Toute variété close, orientable et connexe de dimension 3 est obtenue par chirurgie de Dehn sur un entrelacs de la sphère S^3 .

Corollaire

Toute 3-variété close, orientable, et connexe est le bord d'une 4-variété orientable et même simplement connexe.

Noeuds

Définition

Une partie K d'un espace X est un noeud si K est homéomorphe à une sphère \mathcal{S}^p $(p \in \mathbb{N})$.

Noeuds

Définition

Une partie K d'un espace X est un noeud si K est homéomorphe à une sphère S^p ($p \in \mathbb{N}$).



Figure : Noeuds ayant moins de 5 croisements de \mathbb{R}^3 projetés régulièrement dans \mathbb{R}^2 . À gauche, le noeud trivial ; le deuxième noeud est appelé noeud de trèfle.

Entrelacs

Définition

De façon plus générale, K est un entrelacs si K est homéomorphe à une union disjointe d'une ou plusieurs sphères $\mathcal{S}^{p_1} \cup \ldots \cup \mathcal{S}^{p_r}$.

Entrelacs

Définition

De façon plus générale, K est un entrelacs si K est homéomorphe à une union disjointe d'une ou plusieurs sphères $\mathcal{S}^{p_1} \cup \ldots \cup \mathcal{S}^{p_r}$.

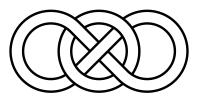


Figure : Entrelacs de *Whitehead*. Il est obtenu à partir de deux noeuds triviaux.

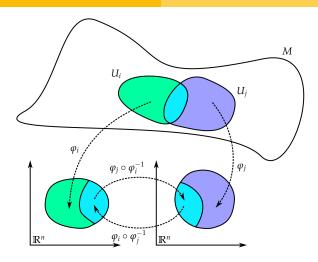


Figure : Une variété et deux de ses cartes.

Orientabilité en basses dimensions

En dimension 2, une variété est orientable si, et seulement si, elle ne contient pas de bande de Möbius.



Figure : Ruban (ou bande) de Möbius.

Orientabilité en basses dimensions

En dimension 2, une variété est orientable si, et seulement si, elle ne contient pas de bande de Möbius.



Figure : Ruban (ou bande) de Möbius.

En dimension 3, une variété est orientable si, et seulement si, elle ne contient pas le produit d'une bande de Möbius et d'un intervalle (bande de Möbius épaissie).

On a besoin:

- d'une 3-variété *M*, avec ou sans bord;
- 2 d'un entrelacs $L = L_1 \cup ... \cup L_n$ dans \mathring{M} ;
- \odot de voisinages tubulaires, clos et disjoints N_i dans \mathring{M} ;
- \bullet d'un chemin simple fermé J_i dans chaque ∂N_i .

On a besoin:

- d'une 3-variété M, avec ou sans bord;
- 2 d'un entrelacs $L = L_1 \cup ... \cup L_n$ dans \mathring{M} ;
- 3 de voisinages tubulaires, clos et disjoints N_i dans \mathring{M} ;
- \bullet d'un chemin simple fermé J_i dans chaque ∂N_i .

On peut alors construire la 3-variété

$$M' = \left(M \setminus \left(\mathring{N_1} \cup \ldots \cup \mathring{N_n}\right)\right) \cup_h \left(N_1 \cup \ldots \cup N_n\right),$$

où h est "l'union" des homéomorphismes $h_i:\partial N_i\to\partial N_i$ qui transforment un certain méridien de N_i en J_i .

On a besoin:

- 1 d'une 3-variété *M*, avec ou sans bord;
- 2 d'un entrelacs $L = L_1 \cup ... \cup L_n$ dans \mathring{M} ;
- 3 de voisinages tubulaires, clos et disjoints N_i dans \mathring{M} ;
- lacktriangle d'un chemin simple fermé J_i dans chaque ∂N_i .

On peut alors construire la 3-variété

$$M' = \left(M \setminus \left(\mathring{N_1} \cup \ldots \cup \mathring{N_n}\right)\right) \cup \left(N_1 \cup \ldots \cup N_n\right),\,$$

où h est "l'union" des homéomorphismes $h_i:\partial N_i\to\partial N_i$ qui transforment un certain méridien de N_i en J_i .

La 3-variété M' est alors appelée résultat d'une chirurgie de Dehn sur M le long de l'entrelacs L avec les instructions 3 et 4.

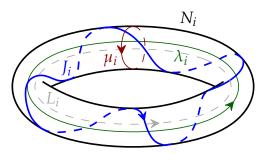


Figure : Exemple de configuration pour la chirurgie.

On a besoin:

- 1 d'une 3-variété *M*, avec ou sans bord;
- 2 d'un entrelacs $L = L_1 \cup ... \cup L_n$ dans \mathring{M} ;
- 3 de voisinages tubulaires, clos et disjoints N_i dans \mathring{M} ;
- lacktriangle d'un chemin simple fermé J_i dans chaque ∂N_i .

On peut alors construire la 3-variété

$$M' = \left(M \setminus \left(\mathring{N_1} \cup \ldots \cup \mathring{N_n}\right)\right) \cup \left(N_1 \cup \ldots \cup N_n\right),\,$$

où h est "l'union" des homéomorphismes $h_i:\partial N_i\to\partial N_i$ qui transforment un certain méridien de N_i en J_i .

La 3-variété M' est alors appelée résultat d'une chirurgie de Dehn sur M le long de l'entrelacs L avec les instructions 3 et 4.

Introduction Explication de l'énoncé Piste de démonstration Corollaire Corps en anses
Homéomorphisme de torsion
Scindement de Heegaard
Quelques lemmes utiles
Corps de la démonstration

Définition

Corps en anses

Un corps en anses est un espace obtenu à partir de la boule \mathcal{D}^3 (qui n'a pas d'anse) en y attachant g copies distinctes de $\mathcal{D}^2 \times [-1;+1]$ (les anses) par des homéomorphismes qui envoient les 2g disques $\mathcal{D}^2 \times \pm 1$ sur 2g disques disjoints de $\partial \mathcal{D}^3 = \mathcal{S}^2$, de telle sorte que la 3-variété obtenue soit orientable.

Définition

Corps en anses

Un corps en anses est un espace obtenu à partir de la boule \mathcal{D}^3 (qui n'a pas d'anse) en y attachant g copies distinctes de $\mathcal{D}^2 \times [-1;+1]$ (les anses) par des homéomorphismes qui envoient les 2g disques $\mathcal{D}^2 \times \pm 1$ sur 2g disques disjoints de $\partial \mathcal{D}^3 = \mathcal{S}^2$, de telle sorte que la 3-variété obtenue soit orientable.

L'entier g est alors appelé genre du corps en anses ainsi construit.

Introduction Explication de l'énoncé Piste de démonstration Corollaire Corps en anses

Homéomorphisme de torsion Scindement de Heegaard Quelques lemmes utiles Corps de la démonstration



Figure : Des corps en anses de différents genres.

Introduction Explication de l'énoncé Piste de démonstration Corollaire

Corps en anses

Homéomorphisme de torsion Scindement de Heegaard Quelques lemmes utiles Corps de la démonstration



Figure : Des corps en anses de différents genres.

Lemme

Corps en anses homéomorphes

Deux corps en anses sont homéomorphes si, et seulement si, ils sont de même genre.

Définition

Homéomorphisme de torsion

On considère une courbe J située à l'intérieur d'une surface.

On construit un voisinage en anneau A autour de J.

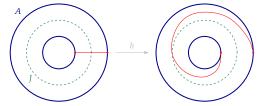
Homéomorphisme de torsion

On considère une courbe J située à l'intérieur d'une surface.

On construit un voisinage en anneau A autour de J.

On définit alors l'homéomorphisme de torsion autour de J dans le voisinage A comme :

- étant l'identité sur le complémentaire de A;
- répondant au schéma ci-dessous à l'intérieur de A.



Définition

Scindement de Heegaard

Soient H_1 et H_2 deux corps en anses de même genre g.

Soit $h: \partial H_1 \to \partial H_2$ un homéomorphisme renversant l'orientation.

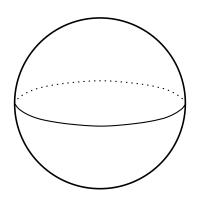
Soit $M = H_1 \cup H_2$ la 3-variété obtenue en collant la frontière de H_1

et la frontière de H_2 .

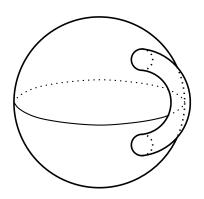
M est alors une 3-variété close et orientable, et le triplet (H_1, H_2, h) est appelé scindement de Heegaard de genre g de M.

Lemme

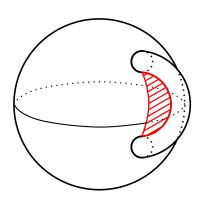
Lemme



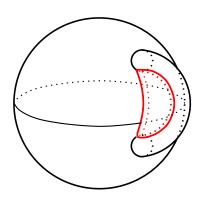
Lemme



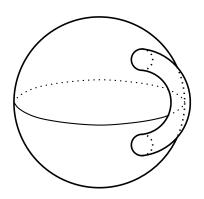
Lemme



Lemme



Lemme



Introduction Explication de l'énoncé Piste de démonstration Corollaire Corps en anses Homéomorphisme de torsion Scindement de Heegaard Quelques lemmes utiles Corps de la démonstration

Théorème

Existence d'un scindement de Heegaard

Toute 3-variété connexe, close et orientable possède un scindement de Heegaard.

Définition

Homotopies et Isotopies

Soient f_0 et f_1 deux applications continues d'un espace X dans un espace Y.

Homotopies et Isotopies

Soient f_0 et f_1 deux applications continues d'un espace X dans un espace Y.

On dit que f_0 est homotope à f_1 , s'il existe une application continue $F: X \times [0;1] \to Y$, telle que $F(\bullet,0) = f_0$ et $F(\bullet,1) = f_1$. Pour tout $t \in [0;1]$, on considère alors

$$f_t: \left| \begin{array}{ccc} X & \rightarrow & Y \\ x & \mapsto & F(x,t) \end{array} \right|$$

et on dit que F (ou f_t) est une homotopie de f_0 à f_1 .

Homotopies et Isotopies

Soient f_0 et f_1 deux applications continues d'un espace X dans un espace Y.

On dit que f_0 est homotope à f_1 , s'il existe une application continue $F: X \times [0;1] \to Y$, telle que $F(\bullet,0) = f_0$ et $F(\bullet,1) = f_1$. Pour tout $t \in [0;1]$, on considère alors

$$f_t: \left| \begin{array}{ccc} X & \to & Y \\ x & \mapsto & F(x,t) \end{array} \right|$$

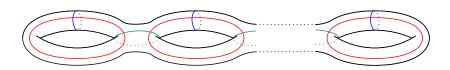
et on dit que F (ou f_t) est une homotopie de f_0 à f_1 . On parle d'isotopie, si de plus, pour tout $t \in [0;1]$, f_t est un homéomorphisme.

Théorème

Lickorish Twist Theorem

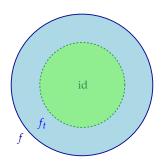
Soit H un corps en anses de genre g.

Alors tout homéomorphisme de ∂H sur lui-même préservant l'orientation est isotope à un produit d'homéomorphismes de torsion autour des (3g-1) courbes dessinées ci-dessous.



Lemme

Soit H un corps en anses (l'hypothèse variété compacte à bord suffit), $f:\partial H\to \partial H$ un homéomorphisme isotope à l'identité. Alors on peut étendre f en un homéomorphisme $\overline{f}:H\to H$, égal à l'identité, sauf éventuellement sur un collier de ∂H .



Lemme

Soient H et H' deux corps en anses de même genre.

Soit $f: \partial H \rightarrow \partial H'$ un homéomorphisme.

Alors il existe des tores solides disjoints V_1, \ldots, V_r dans H et V_1', \ldots, V_r' dans H' tels que f s'étende en un homéomorphisme

$$\overline{f}: H \setminus \left(\mathring{V}_1 \cup \ldots \cup \mathring{V}_r\right) \to H' \setminus \left(\mathring{V}_1' \cup \ldots \cup \mathring{V}_r'\right).$$

Lemme

Soit H un corps en anses.

Soit $f: \partial H \rightarrow \partial H$ un homéomorphisme.

Alors il existe des tores solides disjoints V_1, \ldots, V_r dans H et V_1', \ldots, V_r' dans H tels que f s'étende en un homéomorphisme

$$\overline{f}: H \setminus \left(\mathring{V_1} \cup \ldots \cup \mathring{V_r}\right) \to H \setminus \left(\mathring{V_1'} \cup \ldots \cup \mathring{V_r'}\right).$$

Soit H un corps en anses.

Soit $f:\partial H\to \partial H$ un homéomorphisme préservant l'orientation. Alors il existe des tores solides disjoints V_1,\ldots,V_r dans H et V_1',\ldots,V_r' dans H tels que f s'étende en un homéomorphisme

$$\overline{f}: H \setminus \left(\mathring{V_1} \cup \ldots \cup \mathring{V_r}\right) \to H \setminus \left(\mathring{V_1'} \cup \ldots \cup \mathring{V_r'}\right).$$

Soit H un corps en anses.

Soit $f:\partial H\to \partial H$ un homéomorphisme préservant l'orientation. Alors il existe des tores solides disjoints V_1,\ldots,V_r dans H et V_1',\ldots,V_r' dans H tels que f s'étende en un homéomorphisme

$$\overline{f}: H \setminus \left(\mathring{V_1} \cup \ldots \cup \mathring{V_r}\right) \to H \setminus \left(\mathring{V_1'} \cup \ldots \cup \mathring{V_r'}\right).$$

f est isotope à $\tau_r \circ \ldots \circ \tau_1$ d'après le *Lickorish* Twist Theorem.

Soit H un corps en anses.

Soit $f:\partial H\to \partial H$ un homéomorphisme préservant l'orientation. Alors il existe des tores solides disjoints V_1,\ldots,V_r dans H et V_1',\ldots,V_r' dans H tels que f s'étende en un homéomorphisme

$$\overline{f}: H \setminus \left(\mathring{V}_1 \cup \ldots \cup \mathring{V}_r\right) \to H \setminus \left(\mathring{V}_1' \cup \ldots \cup \mathring{V}_r'\right).$$

$$f = \tau_r \circ \ldots \circ \tau_1$$

$$f = \tau_r \circ \ldots \circ \tau_1$$

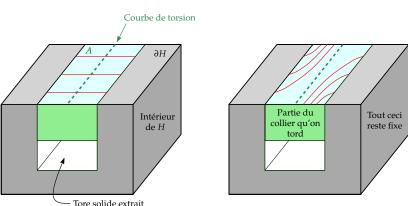


Figure : Action de l'homéomorphisme $\overline{\tau_1}$ sur H privé d'un tunnel (tore solide) V_1 .

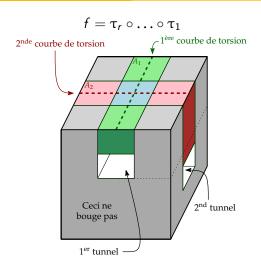


Figure : Creusement d'un second tunnel dans H.

Soit H un corps en anses.

Soit $f: \partial H \rightarrow \partial H$ un homéomorphisme préservant l'orientation.

Alors il existe des tores solides disjoints V_1, \ldots, V_r dans H et V_1', \ldots, V_r' dans H tels que f s'étende en un homéomorphisme

$$\overline{f}: H \setminus \left(\mathring{V_1} \cup \ldots \cup \mathring{V_r}\right) \to H \setminus \left(\mathring{V_1'} \cup \ldots \cup \mathring{V_r'}\right).$$

$$f=\tau_r\circ\ldots\circ\tau_1$$
étendu en $\overline{f}=\overline{\tau_r}\circ\ldots\circ\overline{\tau_1}$ sur $H\setminus\left(\mathring{V_1}\cup\ldots\cup\mathring{V_r}\right)$

On aura alors, pour i < r, $V'_i = \overline{\tau_r} \circ \ldots \circ \overline{\tau_{i+1}} (V_i)$ et $V'_r = V_r$, qui sont bien des tores solides.

$$\overline{f}: H \setminus \left(\mathring{V_1} \cup \ldots \cup \mathring{V_r}\right) \to H \setminus \left(\mathring{V_1'} \cup \ldots \cup \mathring{V_r'}\right)$$

Introduction Explication de l'énoncé Piste de démonstration Corollaire Corps en anses Homéomorphisme de torsion Scindement de Heegaard Quelques lemmes utiles Corps de la démonstration

Théorème

Lickorish et Wallace (1960-1962)

Corps en anses Homéomorphisme de torsion Scindement de Heegaard Quelques lemmes utiles Corps de la démonstration

Théorème

Lickorish et Wallace (1960-1962)

Toute variété close, orientable et connexe de dimension 3 est obtenue par chirurgie de Dehn sur un entrelacs de la sphère S^3 .

Soit M une variété close orientable.

Corps en anses Homéomorphisme de torsion Scindement de Heegaard Quelques lemmes utiles Corps de la démonstration

Théorème

Lickorish et Wallace (1960-1962)

Toute variété close, orientable et connexe de dimension 3 est obtenue par chirurgie de Dehn sur un entrelacs de la sphère S^3 .

Soit *M* une variété close orientable.

On a le scindement de *Heegaard* : $M = H'_1 \cup H'_2$ de genre g.

Lickorish et Wallace (1960-1962)

$$M=H_1' \underset{h'}{\cup} H_2'$$
 et $\mathcal{S}^3=H_1 \underset{h}{\cup} H_2$, scindements de genre g . $h:\partial H_2 \longrightarrow \partial H_1 \qquad \qquad h':\partial H_2' \longrightarrow \partial H_1' \qquad \qquad k:H_1 \longrightarrow H_1'$

Lickorish et Wallace (1960-1962)

$$M=H_1' \mathop{\cup}_{h'} H_2'$$
 et $\mathcal{S}^3=H_1 \mathop{\cup}_{h} H_2$, scindements de genre g . $h:\partial H_2 \rightarrow \partial H_1 \qquad \qquad h':\partial H_2' \rightarrow \partial H_1' \qquad \qquad k:H_1 \rightarrow H_1' \ (h')^{-1}kh:\partial H_2 \rightarrow \partial H_2'$

Lickorish et Wallace (1960-1962)

$$M=H_1' \underset{h'}{\cup} H_2'$$
 et $\mathcal{S}^3=H_1 \underset{h}{\cup} H_2$, scindements de genre g .
 $h:\partial H_2 \to \partial H_1 \qquad \qquad h':\partial H_2' \to \partial H_1' \qquad \qquad k:H_1 \to H_1'$
 $(h')^{-1}kh:\partial H_2 \to \partial H_2'$ étendu en

$$\overline{(h')^{-1}kh}: H_2 \setminus \left(\mathring{V_1} \cup \ldots \cup \mathring{V_r}\right) \to H_2' \setminus \left(\mathring{V_1'} \cup \ldots \cup \mathring{V_r'}\right)$$

Lickorish et Wallace (1960-1962)

$$\begin{split} M &= H_1' \cup H_2' \text{ et } \mathcal{S}^3 = H_1 \cup H_2, \text{ scindements de genre } g. \\ h &: \partial H_2 \to \partial H_1 \qquad \qquad h' : \partial H_2' \to \partial H_1' \qquad \qquad k : H_1 \to H_1' \\ \hline \overline{(h')^{-1}kh} : H_2 \setminus \left(\mathring{V}_1 \cup \ldots \cup \mathring{V}_r\right) \to H_2' \setminus \left(\mathring{V}_1' \cup \ldots \cup \mathring{V}_r'\right) \\ \hline \overline{k} : \left| \begin{array}{c} \mathcal{S}^3 \setminus \left(\mathring{V}_1 \cup \ldots \cup \mathring{V}_r\right) & \to & M \setminus \left(\mathring{V}_1' \cup \ldots \cup \mathring{V}_r'\right) \\ & \times \in H_1 & \mapsto & k(x) \in H_1' \\ & y \in H_2 \setminus \left(\mathring{V}_1 \cup \ldots \cup \mathring{V}_r\right) & \mapsto & \overline{(h')^{-1}kh}(y) \in H_2' \setminus \left(\mathring{V}_1' \cup \ldots \cup \mathring{V}_r'\right) \\ \end{matrix} \end{split}$$

Introduction Explication de l'énoncé Piste de démonstration Corollaire

Corollaire

Toute 3-variété close, orientable, et connexe est le bord d'une 4-variété orientable et même simplement connexe.

Corollaire

Toute 3-variété close, orientable, et connexe est le bord d'une 4-variété orientable et même simplement connexe.

Définition

Simple connexité

Si X est un espace topologique connexe par arcs, on dit qu'il est simplement connexe si tout lacet tracé sur X est homotope à un point.

Intuitivement, on peut tirer sur le lacet pour le rétrécir jusqu'à ce qu'il ne forme plus qu'un point; il n'y a pas d'obstacle (c'est-à-dire de trou).

Corollaire

Toute 3-variété close, orientable, et connexe est le bord d'une 4-variété orientable et même simplement connexe.



Corollaire

Toute 3-variété close, orientable, et connexe est le bord d'une 4-variété orientable et même simplement connexe.

