Retour oral MOPS
Reconstitution du texte

J'ai essayé de redonner la philosophie du texte, mais je ne garantis pas la réussite du projet. Tout ce qui est en italique est soit des commentaires personnels, soit des enoncés approximatifs. Attention, mes souvenirs sont peu précis donc il y a sans doute des erreurs de retranscription.

On modélise un agent qui investit sur les marché financiers. Pour avoir accès à ce service, il paie périodiquement un prix fixe c. Ensuite, entre deux paiements, ses actifs ont une rentabilité $\varepsilon_n > 0$, c'est-à-dire qu'en notant X_n la valeur de ses actifs juste avant le $n^{\text{ème}}$ prélevement, les X_k sont reliés par la formule $X_{n+1} = \varepsilon_{n+1}(X_n - c)$.
L'objectif de l'agent est de maximiser ses profits, mais aussi d'éviter la ruine. On définit alors la fonction de survie

$$s(x) := \mathbb{P}(\forall n \in \mathbb{N},\ X_n > 0 \mid X_0 = x)$$

I. Étude de la fonction de survie

On définit les quantités suivantes :

$$\eta_0 = 1 \quad \text{et} \quad \eta_n = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}$$

$$W_{-1} = 0, \quad W_n = \sum_{k=0}^{n} \eta_k \quad \text{et} \quad W = \sum_{k=0}^{+\infty} \eta_k \ \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \eta_n X_n = X_0 + cW_{n-1}$$

Et donc

$$s(x) = \mathbb{P}(\forall n \in \mathbb{N},\ x - cW_{n-1} > 0) = \mathbb{P}\left(\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n-1} < \frac{x}{c}\right) = \mathbb{P}\left(W \leqslant \frac{x}{c}\right) = F\left(\frac{x}{c}\right)$$

où on a noté F la fonction de répartition de W. Ainsi, $s(x)$ dépend des ε_k à travers la loi de W, et dépend de x et c à travers le quotient $\frac{x}{c}$.
On définit enfin les bords gauche et droit de W :

$$g_W = \inf\{t \in \mathbb{R} \mid F(t) > 0\} \quad \text{et} \quad d_W = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid F(t) < 0\}$$

II. *? ? ?*

Théorème 1 : Si les $(\varepsilon_k)_{k \geqslant 1}$ sont indépendantes, alors $\mathbb{P}(W = +\infty) \in \{0, 1\}$.
Preuve : $W = 1 + \frac{1}{\varepsilon_1} W'$ où W' est $\sigma(\varepsilon_k,\ k \geqslant 2)$-mesurable et $\{W = +\infty\} = \{W' = +\infty\}$. En itérant le résultat, on montre que $\{W = +\infty\}$ appartient à $\sigma(\varepsilon_k,\ k \geqslant n)$ pour tout n. La loi du 0-1 conclut.

Théorème 2 : *Étude en fonction de si* $\ln(\varepsilon)$ *est intégrable : si oui distinction de cas en fontion de* $\mathbb{E}[\ln(\varepsilon)]$*, sinon on obtient un résultat différent en fonction de si c'est uniquement la partie positive ou uniquement la partie négative de* $\mathbb{E}[|\ln(\varepsilon)|]$ *qui diverge.*
Preuve : *non traitée*

Théorème 3 : *Exprimer les bords de* ε *(*g_ε *et* d_ε*) en fonction des bords de* W*. Cette expression fait intervenir une fonction qui ressemble à* $\varphi : t \mapsto \frac{t}{1+t}$.
Preuve : *non traitée*

III. Estimation des bords de ε

On suppose que les (ε_k) sont indépendantes et suivent la même loi qu'une variable ε. Après une étude préalable des marchés financiers, on dispose d'un échantillon $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ de variables suivant la loi de ε. On définit $Y_n := \min(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ et $Z_n := \max(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$. (Y_n, Z_n) est un estimateur naturel pour $(g_\varepsilon, d_\varepsilon)$ qui converge presque sûrement. Si on veut estimer la vitesse de convergence, il faut une hypothèse supplémentaire sur ε.

a) ε suit une loi $\mathcal{U}([g_\varepsilon, d_\varepsilon])$

Alors le couple $\left(n\dfrac{d_\varepsilon - Z_n}{d_\varepsilon - g_\varepsilon}, n\dfrac{Y_n - g_\varepsilon}{d_\varepsilon - g_\varepsilon}\right)$ converge en loi vers (E, E') où E et E' sont deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètre 1.

On a alors également la convergence en loi de $\left(n\dfrac{d_\varepsilon - Z_n}{Z_n - Y_n}, n\dfrac{Y_n - g_\varepsilon}{Z_n - Y_n}\right)$ vers (E, E').

En notant q_α le quantile d'ordre $\sqrt{1-\alpha}$ de la loi exponentielle de paramètre 1, on a finalement l'intervalle de confiance asymptotique de niveau α suivant :

$$\left[Y_n - q_\alpha \frac{Z_n - Y_n}{n}\ ,\ Y_n\right] \times \left[Z_n\ ,\ Z_n + q_\alpha \frac{Z_n - Y_n}{n}\right]$$

(Honnêtement je ne suis plus sûr de l'expression exacte de la région de confiance, mais c'est celle à laquelle on s'attend vu le raisonnement précédent.)

b) Cas où la densité de ε s'annule à droite

Partie non traitée

Retour oral MOPS
Déroulé de l'oral

Titre (approximatif) : Investir sur les marchés financiers

Problématique (approximative) : Comment minimiser les chances de se ruiner en investissant dans des actifs risqués ?

Plan :

I. Définitions et présentation du modèle ($\star$)
II. Étude de la fonction de survie
III. Cas où les $(\varepsilon_k)_{k\geqslant 0}$ sont indépendantes
IV. Estimation des bords de ε dans le cas uniforme ($\star$)

Je voulais juste traiter le théorème 1 dans la partie III. parce que j'avais étoffé la preuve, mais au final j'ai dû passer pour me garder le temps de parler des estimations dans ma partie IV. (qui était l'endroit de mon exposé auquel je tenais le plus).

Dans ma partie IV., j'ai réussi à montrer la CVL des marginales vers une lois exponentielle, mais pas la CVL du couple (je le précise parce qu'une question sera là-dessus).

Pour les simus, j'ai simulé :

— des trajectoires dans mon I.
— la CVL vers une exponentielle par la CVS des fonctions de répartitions dans mon IV.
— des intervalles de confiance en tirant des échantillons d'exponentielles dans mon IV.

J'avais d'autres codes que je n'ai pas trop pu montrer à cause du temps, notamment la convergence ps du couple d'estimateurs.

Questions du jury (pas forcément dans l'ordre) :

- Vous avez dit ne pas avoir réussi à montrer la convergence en loi du couple. Pour montrer celle de la marginale, vous avez utilisé la fonction de répartition, est-ce qu'on ne pourrait pas adapter cette méthode pour le couple ?

  Il m'a guidé pour montrer la CVL du couple en calculant $\mathbb{P}\left(n\dfrac{d_\varepsilon - Z_n}{d_\varepsilon - g_\varepsilon} \geqslant t_1\ ,\ n\dfrac{Y_n - g_\varepsilon}{d_\varepsilon - g_\varepsilon} \geqslant t_2\right)$
- Vous avez dit que vous pourriez utiliser l'intervalle de confiance pour conduire un test statistique, pourriez-vous détailler ?

  J'ai construit le test classique basé sur la région de confiance, ça a eu l'air de convaincre mais ils n'ont pas poussé plus loin (notamment, aucune question sur la p-valeur...)
- Vous êtes passé rapidement sur la preuve du théorème 1, pouvez-vous détailler ?

  J'avais préparé la preuve donc j'ai juste dit ce que je n'avais pas eu le temps de dire.
- En quoi l'estimation de votre partie IV. vous permet-elle de répondre à votre problématique ?

  J'ai été honnête : on peut relier les bords de W à ceux de ε, et connaître la loi de W nous intéresse pour avoir une idée de la probabilité de survie, mais c'est une partie du texte que je n'ai pas traitée donc je ne peux pas parler de ce lien.

- Pouvez-vous détailler l'utilisation du lemme de Slutsky dans le IV., et en particulier la convergence en proba de $\dfrac{d_\varepsilon - g_\varepsilon}{Z_n - Y_n}$ vers 1 ?
  J'étais un peu confus sur ça parce que pendant l'exposé j'ai dit que les estimateurs convergeaient ps mais sans le montrer et j'ai utilisé ça pour la CV en proba, mais là ils me demandaient une preuve directe suffisante, c'est-à-dire ici de montrer une convergence en loi vers une constante.

Bilan et impressions personnelles :

— Modélisation J'ai essayé de justifier le modèle et d'y revenir à la fin de mes parties, je pense que c'était correct mais pas flamboyant non plus.
  Note estimée : entre 1,5/4 et 3/4

— Illustration informatique J'avais des simus correctes, j'ai pu agir sur les paramètres quand ils me l'ont demandé, je pense que sur ce point je suis pas trop mal même si ça aurait pu être un peu plus fourni.
  Note estimée : entre 2/4 et 3,5/4

— Contenu mathématique Je pense avoir fait pas mal de preuves. Le texte était globalement assez elliptique, j'en ai traité à peine la moitié, mais du coup c'était facile de trouver des choses à prouver. Je n'ai pas réussi à montrer la convergence en loi du couple, et j'ai peut-être fait un peu de paraphrase à certains endroits.
  Note estimée : entre 2,5/4 et 4/4.

— Réponse aux questions Mitigé sur cette section, je pense avoir eu besoin d'aide à plusieurs endroits, mais j'ai l'impression d'avoir été quand même réactif, surtout sur les perches que j'avais tendues pendant mon exposé.
  Note estimée : entre 1,5/4 et 3,5/4.

— Organisation Correct sur ce point-là à mon avis, pendant mon exposé j'ai passé certaines choses pour ne pas en avoir trop à dire, j'ai fini les 35' aux 5/6 de mon tableau. Mon titre, ma problématique, mon plan et les simus étaient annoncés au début. Peut-être que j'aurais pu mettre plus en valeur les changements de partie et les théorèmes/preuves.
  Note estimée : entre 1,5/4 et 3,5/4.

— En conclusion, je pense que je n'ai pas fait de grosse erreur, mais je n'ai pas non plus été excellent dans de nombreux domaines, donc je m'attends à une note correcte mais pas excellente. Ça reste très dur à estimer...
  Note estimée à vue de nez : entre 13/20 et 18/20.
  Note estimée en sommant les estimations marginales : entre 9/20 et 17,5/20.

Bilan après les résultats :

Note obtenue : $\boxed{13/20}$.
C'est le fond de la fourchette, une note qui me déçoit un peu.
J'ai peut-être fait la même erreur qu'à mon dernier oral blanc : traiter des parties du textes simples et/ou classiques, sans rentrer dans les parties plus difficiles. Cela, couplé au fait que j'ai dû être guidé dans certaines questions, a peut-être laissé une impression d'un élève qui veut rester sur des questions élémentaires.
Le côté modélisation m'a sûrement pénalisé aussi.
Bon ça reste une note correcte, mais j'ai l'impression qu'il y avait moyen d'avoir de très bonnes notes en modé et que je n'en ai pas vraiment profité...