

# Retour oral algèbre

## Références :

- ▶ **GouAn** *Analyse*, Xavier GOURDON
- ▶ **Dan** *Analyse et probabilités*, Jean-François DANTZER
- ▶ **RomAl** *Algèbre et géométrie*, Jean-Étienne ROMBALDI
- ▶ **Goz** *Théorie de Galois*, Ivan GOZARD
- ▶ **IP** *L'oral à l'agrégation de mathématiques*, Lucas ISENMANN, Timothée PECATTE

## Couplage :

- ✓ **102** Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.
- × **120** Anneaux  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Applications.

## Plan :

- I. Complexes de module 1
  - a) Exponentielle complexe [**GouAn**] et [**Dan**]
  - b) Structure de groupe et définition de  $2\pi$
  - c) Spectre des matrices orthogonales [**RomAl**]
- II. Racines de l'unité
  - a) Sous-groupes finis de  $\mathbb{U}$
  - b) Polynômes cyclotomiques [**Goz**]
- III. Racines de l'unité constructibles [**Goz**]

## Développements :

- × Classification des groupes abéliens finis [**IP**]
- ✓ Polygônes constructibles [**IP**]

J'ai commencé ma défense de plan en parlant de l'identité d'Euler  $e^{i\pi} + 1 = 0$ , en expliquant pourquoi elle est remarquable et en disant que ça découlait des considérations sur l'exponentielle complexe du début du plan. Je précise ça car le jury va revenir dessus dans les questions.

## Questions sur le développement :

- Pour montrer la surjectivité de votre morphisme entre  $G$  et  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ , vous construisez un antécédent à  $\bar{k}$ . Pouvez-vous montrer que c'est bien un morphisme de groupes?  
*Question pas hyper fun mais logique.*
- Pouvez-vous montrer que la famille  $\{\omega, \omega^2, \dots, \omega^{p-1}\}$  est une base?  
*J'ai un peu galéré, j'ai d'abord essayé un argument type Vandermonde, puis il m'a dit de regarder un polynôme et j'ai finalement trouvé l'argument qu'on avait un polynôme de degré  $p - 2$  annulant  $\omega$  alors que son polynôme minimal est de degré  $p - 1$ .*

## Questions sur le plan :

- Dans votre plan, vous dites que tout sous-groupe fini de  $\mathbb{U}$  est un  $\mathbb{U}_n$ . Que pouvez-vous dire d'un sous-groupe fini de  $(\mathbb{C}^*, \times)$ ?  
*C'est les mêmes. Plusieurs arguments possibles : soit on dit que les éléments d'un tel groupe sont racines d'un  $X^n - 1$ , soit on dit que si  $g \in G$  est de module différent de 1, alors  $\{g^n ; n \in \mathbb{Z}\}$  est infini.*

- Dans votre défense de plan, vous avez dit qu'on pouvait utiliser la définition de  $2\pi$  pour déterminer la valeur de  $e^{i\pi}$ . Peut-on utiliser un raisonnement similaire pour déterminer la valeur de  $e^{i\frac{\pi}{2}}$  ?

*La question (et la réponse) est sympathique, mais j'ai eu besoin d'être guidé. J'ai rapidement montré que c'était soit  $i$  soit  $-i$ , puis je me suis demandé à l'oral si on pouvait distinguer les deux. On m'a fait comprendre que oui, donc j'ai continué à chercher. La réponse fait appel à 3 arguments : la continuité de l'exponentielle complexe, l'équivalent  $\Im(e^{it}) = \sin(t) \sim t$  au voisinage de 0 et le fait que  $\Im(e^{it})$  ne s'annule pas entre 0 et  $\pi$ . On montre alors que  $\Im(e^{it})$  est positive pour  $t \in [0, \pi]$  et donc, comme  $\frac{\pi}{2} \in [0, \pi]$ , on a  $\Im(e^{i\frac{\pi}{2}}) \geq 0$  et donc c'est  $i$ .*

- Vous avez utilisé les complexes de module 1 pour définir le nombre  $\pi$ . Peut-on utiliser les complexes de module 1 pour définir une autre notion fondamentale en géométrie, la notion d'angle ?

*Parler de l'action de  $\mathbb{U}$  sur lui-même par translation, qui est 1-transitive mais pas 2-transitive, et appeler "angle" les orbites pour l'action double.*

### Questions générales :

- Jeuçépu

### Bilan et impressions personnelles :

- Plutôt content de mon plan, je le trouvais fourni et pertinent, avec 51 items (première fois que je dépasse 35 items en temps limité, comme quoi il ne faut pas perdre espoir...).  
Note estimée : entre 4,5/6 et 6/6
- Content de mon développement. J'ai failli dépasser mais j'ai réussi à conclure en une phrase par une pirouette linguistique. Je pense avoir été clair, je l'ai peut-être récité un peu trop "scolairement" alors que d'habitude j'essaie de rendre vivants mes exposés. Petit problème, le petit bug sur le fait que le truc était une base, mais j'ai fini par retrouver l'argument avec de l'aide.  
Note estimée : entre 5/6 et 6/6.
- Réponse aux questions : J'ai l'impression d'avoir eu pas mal de réponses, certaines ont eu besoin d'un peu d'aide mais je n'ai jamais vraiment séché donc j'étais content !  
Note estimée : entre 4,5/6 et 6/6
- Très satisfait de cet oral, j'ai la sensation d'avoir donné une impression de maîtrise (justifiée ou non, je mets mon joker) sur cette leçon et notamment sur les questions un peu inhabituelles de géométrie. Peut-être un petit blocage par ci par là, mais rien de très grave je pense  
Note estimée à vue de nez : entre 14/20 et 19,5/20.  
Note estimée en sommant les estimations marginales : entre 14,5/20 et 20/20.

### Bilan après les résultats :

Note obtenue : 16/20.

Une note dans la fourchette, plutôt cohérente.

Pas grand chose à dire dessus vu que je n'ai pas le détail des notes. J'ai sûrement donné une impression de maîtrise inférieure à celle que je pensais mais dur de savoir où j'ai perdu les points.