

Retour oral analyse

Références :

- ▶ **GK** *De l'intégration aux probabilités*, Olivier GARET et Anne KURTZMAN
- ▶ **App** *Probabilités pour les non-probabilistes*, Walter APPEL
- ▶ **ZQ** *Analyse pour l'agrégation*, Claude ZUILY, Hervé QUEFFELEC
- ▶ **IP** *L'oral à l'agrégation de mathématiques*, Lucas ISENMANN, Timothée PECATTE

Couplage :

- × **201** Espaces de fonctions. Exemples et applications.
- ✓ **261** Loi d'un variable aléatoire : caractérisation, exemple, application.

Plan :

- I. Notions générales **GK**
 - a) Variables aléatoires et loi
 - b) Espérance
- II. Caractérisation de la loi **GK**
 - a) Fonction de répartition
 - b) Fonction caractéristique
- III. Exemples usuels **GK/App**
 - a) Exemples de lois discrètes
 - b) Exemples de lois à densité
- IV. Convergence en loi **GK**

Développements :

- × Fonctions caractéristiques de la loi normale et de Cauchy [**IP**]/[**GK**]
- ✓ Théorème de Lévy [**ZQ**]

Il m'a juste manqué un peu de temps pour ajouter une annexe avec les espérances, variances, fonctions caractéristiques, etc. des lois usuelles (et ça m'aurait bien servi pendant l'entretien...).

Questions sur le développement :

- Pouvez-vous énoncer Stone-Weierstrass ? Sur quel compact vous placez-vous pour l'appliquer ? L'espace que vous considérez contient-il bien les constantes ?
J'utilise Stone-Weierstrass dans mon dev pour dire que $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$ est dense dans $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$, en disant clairement que je l'admettais. Mais je crois qu'ils auraient aimé que j'ai une idée de la preuve... C'est un développement en soi donc c'est pas du tout trivial, et je n'ai pas réussi à répondre de manière satisfaisante, à part sur la partie "compact" ou j'ai su expliquer que c'était le cercle avec les fonctions continues dessus et qui valent 0 au pôle nord. Je pense que c'est l'un des deux endroits où j'ai été vraiment pénalisé.
- Pouvez-vous détailler pourquoi les fonctions continues qui tendent vers 0 en $\pm\infty$ sont bornées ?
Question qui rassure après l'échec de la précédente.

- Pouvez-vous préciser pourquoi les hypothèses du théorème de convergence dominée sont satisfaites dans la preuve du théorème de Lévy ?

J'ai répété les vérifications que j'avais données à l'oral, mais écrites très succinctement donc il n'avait peut-être pas retenu.

Questions sur le plan :

- Savez-vous prouver votre Théorème n qui dit que la fonction caractéristique caractérise la loi ?

Je réfléchis un peu, mais je ne sais pas... Deuxième point vraiment embêtant de mon oral, ne pas savoir démontrer un item du plan c'est pas bon.

- À la fin de votre plan, vous mettez des applications du TCL, est-ce que vous pourriez détailler un peu ?

J'avais notamment mis une application aux statistiques pour déterminer des intervalles de confiance asymptotiques.

- Vous donnez un lien entre la continuité de φ_X en zéro et l'intégrabilité de X , pouvez-vous généraliser ce résultat à une régularité plus forte ? Pouvez-vous le montrer ?

Je le fais à l'ordre 1 en détaillant pas mal la dérivation sous l'intégrale, et je dis qu'on pourrait faire pareil à l'ordre k .

Questions générales :

- Soit X une va réelle discrète. Calculer

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_X(k) e^{-itk}$$

Cela vous permet-il de répondre à une question posée précédemment ?

J'ai eu besoin d'aide, mais j'ai finalement réussi à montrer que la quantité en question était $2\mathbb{P}(X = k)$, ce qui montre que la fonction caractéristique caractérise bien la loi.

- Soient X et Y deux va vérifiant :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{E}[e^{\lambda X}] = \mathbb{E}[e^{\lambda Y}]$$

Que peut-on en dire ?

Je voulais montrer que c'était la même loi en montrant que c'était la même fonction caractéristique, car si les fonctions $z \mapsto \mathbb{E}[e^{zX}]$ et $z \mapsto \mathbb{E}[e^{zY}]$ coïncident sur \mathbb{R} et sont holomorphes sur \mathbb{C} , alors elles coïncident partout y compris sur $i\mathbb{R}$. J'ai donc utilisé l'holomorphie sous l'intégrale, en majorant $\Re(z)$ sur un compact. Ils ont eu l'air de trouver ça bizarre, mais sont finalement passés à autre chose, je ne sais pas si c'est moi qui ait fait des bêtises ou eux qui ont bugué.

Bilan et impressions personnelles :

- Plan correct, un peu précipité sur la fin et manque sûrement d'exemple et d'une annexe. Manque d'une preuve d'un point du plan mais je pense avoir montré sur d'autres questions que je maîtrisais quand même les notions que j'y ai mises. Note estimée : entre 3/6 et 5/6
- Développement plutôt bien mené. Je finis en 13'30", première fois de ma vie que je finis un dev en avance, mais je ne pense pas que ce soit pénalisé. Je pense avoir été plutôt clair, j'ai essayé de motiver certains choix plutôt que de poser un truc et que ça marche. Gros point noir : le Stone-Weierstrass. Note estimée : entre 3,5/6 et 5/6.

- Réponse aux questions : j'ai l'impression d'avoir bien répondu aux questions simples. Pour les questions un peu plus avancées, j'ai eu besoin d'aide, mais je pense avoir quand même pas trop mal réagi, j'avais quand même des propositions pertinentes et je pense que c'est ce qu'ils attendent, donc j'étais plutôt content. Note estimée : entre 3,5/6 et 5,5/6
- Au final, un oral où j'ai l'impression de ne pas avoir été brillant, mais d'avoir été globalement correct. Ça ne fera pas 18, mais j'ai bon espoir que la note soit quand même relativement correcte.
Note estimée à vue de nez : entre 12/20 et 16/20.
Note estimée en sommant les estimations marginales : entre 10,5/20 et 17,5/20.

Bilan après les résultats :

Note obtenue : 18/20.

Seule des trois notes où je suis agréablement surpris, la seule où je suis en dehors de la fourchette. Je pense qu'ils ont apprécié que je sois actif, que je propose des pistes assez rapidement même si j'étais un peu long à les mettre en oeuvre.

Les gens qui me connaissent savent que c'est un peu une fraude que j'aie eu 18 en analyse, toutes mes excuses aux vrais analystes...