

Sujets classiques de concours

ECG - Mathématiques approfondies

Geoffrey Deperle

Les sujets mentionnés sont (de préférence) à traiter dans l'ordre.
Les sujets comportant une étoile (★) sont de bons sujets d'entraînement. Leur maîtrise doit être complète, il ne faut pas hésiter à les refaire de temps en temps.
Les sujets comportant deux étoiles (★★) sont des sujets classiques qu'il faut savoir refaire correctement et rapidement.
Tous les sujets sont trouvables via ce lien.

1. Algèbre

1.1. Algèbre linéaire

Endomorphismes de polynômes

- EM Lyon 2015 (Problème 1, partie I) (Étude de deux endomorphismes de polynômes dont la multiplication à gauche et la dérivation discrète)
- EDHEC 2012 (Exercice 3, question 1,2) (étude d'une division euclidienne)
- Ecricome 2012 (Partie I) (endomorphisme définie par une intégrale)

Endomorphisme de fonctions

- Ecricome 2014 (étude d'un endomorphisme de fonctions avec réduction)
- EM Lyon 2014 (problème 1, partie I) (Étude de l'injectivité, surjectivité d'un endomorphisme de fonction)

1.2. Polynômes

Polynômes de Tchebychev

- Écricome 2020 (Exercice 1) (Étude de toutes les propriétés des polynômes de Tchebychev)(★★)

Polynômes interpolateur de Lagrange

Il faut savoir montrer l'existence et l'unicité du polynôme interpolateur de Lagrange avec une méthode constructive (en donnant une formule explicite) et avec une méthode non constructive (avec un isomorphisme entre $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$).

- EDHEC 2019 (Exercice 1, question 4) (Étude de l'interpolation de Lagrange polynômiale)
- EM Lyon 2012 (Partie I) (Étude de l'interpolation de Lagrange avec un point de vue d'Algèbre linéaire)
- HEC 2017 (Partie II) (Étude de l'erreur liée à l'interpolation de Lagrange)

1.3. Réduction des endomorphismes

Réduction de la matrice J

Il faut savoir réduire la matrice ne contenant que des 1 et savoir s'en servir pour réduire des matrices de la forme $\lambda I_n + J$

- Ecricome 2017 (Exercice 2.1) (Principe de réduction de la matrice J)
- EDHEC 2017 (Exercice 3, question 1) (Réduction d'une combinaison linéaire de matrice J)

Réduction d'endomorphismes de polynômes

- EM Lyon 2021 (étude d'un endomorphisme avec dérivée + quelques résultats de diagonalisabilité)
- EM Lyon 2019 (Partie A) (étude d'un endomorphisme avec dérivée et primitive + quelques résultats de réduction)
- EM Lyon 2018 (Problème 2, partie I) (étude d'un endomorphisme avec dérivée + quelques résultats de diagonalisabilité)
- EM Lyon 2017 (Partie II) (étude d'un endomorphisme avec dérivée + quelques résultats de diagonalisabilité)

1.4. Espaces euclidiens

Étude d'un produit scalaire de polynômes

- EM Lyon 2020 (Problème 2, partie A) (Étude d'un produit scalaire intégrale) (★)
- Ecricome 2015 (Exercice 1) (Étude d'un endomorphisme dans un espace euclidien de polynôme)
- EM Lyon 2019 (Partie D) (Étude d'inégalité de type Cauchy-Schwarz) (★)

Endomorphisme symétrique positif

Il faut savoir faire le lien entre la relation ${}^tXAX \geq 0$ pour tout X et le fait que les valeurs propres de la matrice symétrique A sont positives. Il faut également savoir montrer l'existence d'une racine carrée si une matrice vérifie cette condition.

- EDHEC 2015 (Exercice 3) (Étude d'un endomorphisme symétrique positive et existence d'une racine carrée)
- EM Lyon 2012 (Partie III) (Caractérisation des matrices symétrique positives) (★★)

→ Ecricome 2018 (Exercice 1, Partie 2) (Cas particulier d'endomorphisme symétrique positif)

Calcul de distance avec projeté orthogonal

→ EM Lyon 2020 (Problème 2, partie B) (Calcul d'un projeté orthogonal de deux méthodes)

→ EDHEC 2014 (Exercice 3) (Calcul d'une borne inférieure à l'aide d'un projeté orthogonal)

Adjoint d'un endomorphisme

→ EDHEC 2019 (Exercice 3) (Étude de l'adjoint d'un endomorphisme et endomorphismes normaux)

→ EDHEC 2013 (Exercice 2) (Une propriété sur les endomorphismes adjoints)

2. Analyse

2.1. Suites et séries

Étude de suite récurrente

- Ecricome 2012 (Exercice 1) (Étude d'une suite récurrente de type $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f définie par une intégrale)

Comparaison série-intégrale

- Ecricome 2016 (Exercice 1) (Utilisation de la comparaison série-intégrale pour montrer la convergence d'une série)
- EDHEC 2022 (Problème 3, partie 3) (Utilisation de la comparaison série-intégrale pour calculer l'équivalent de la somme d'une série)
- Ecricome 2020 (Exercice 2) (Utilisation de la comparaison série-intégrale pour trouver un équivalent du reste d'une série convergente) (★)

Développement en série de $\ln$ et série harmonique

- EM Lyon 2021 (Partie A) (Équivalence de la série harmonique et constante γ)
- Maths II 2020 (Partie 1, question 1) (Développement en série du $\ln$) (★★)
- EDHEC 2020 (Problème) (Étude de la série harmonique et de séries apparentées)

Intégrales de Wallis et formule de Stirling

Il faut savoir redémontrer rapidement la formule de récurrence et savoir l'utiliser pour montrer les propriétés classiques sur cette suite (Équivalent, forme explicite etc...)

- EM Lyon (Problème 2, partie 1) (Étude complète des intégrales de Wallis et démonstration de la formule de Stirling) (★★)
- EM Lyon 2018 (Problème 1, partie 1) (Étude moins guidée des intégrales de Wallis)
- EDHEC 2013 (Problème, partie 1) (Étude des intégrales de Wallis et équivalent)
- Ecricome 2019 (Exercice 1) (Étude de la série dont le terme général est la suite des intégrales de Wallis)

2.2. Étude de fonctions

Étude de fonctions de la variable réelle

- Ecricome 2023 (Problème, partie 1)

Formules de Taylor

- EM Lyon 2018 (Problème I, partie 1 et 2) (étude d'une intégrale à paramètre grâce à des inégalités de type Taylor) (★)
- Ecricome 2017 (Exercice 1) (Calcul de la somme d'une intégrale grâce aux inégalité de Taylor-Lagrange).
- Ecricome 2022 (Exercice 1) (étude d'une suite récurrente et majoration du reste d'une série avec inégalité de Taylor)
- EM Lyon 2015 (Problème 2) (★) (Étude de la transformée de Laplace, utilisation de différent types d'inégalité, et application à la résolution d'une équation fonctionnelle)

Fonctions trigonométrique hyperboliques

- EDHEC 2022 (Problème) (Étude complète des fonctions cosinus, sinus et tangente hyperbolique) (★)

2.3. Fonctions de plusieurs variables

- EM Lyon 2014 (Partie IV) (Étude d'extremums locaux d'une fonction de deux variables)
- EDHEC 2020 (Exercice 1) (Étude d'extremums locaux d'une fonction de trois variables, et étude d'extremums avec contraintes linéaires et non-linéaires)
- Ecricome 2021 (Exercice 2) (Étude d'extremums locaux d'une fonction de deux variables, avec passage au global avec inégalité)
- HEC 2020 (Partie II) (Étude d'extremes locaux d'une fonction de deux variable, avec passage au global avec Taylor-Lagrange)

3. Probabilités

3.1. Probabilités discrètes

Problème de probabilités discrètes

- Ecricome 2019 (Problème, Partie A et C) (Étude d'un problème d'urne)
- EDHEC 2015 (Problème, Partie 2) (Étude d'un problème avec loi géométrique)

Chaine de Markov

- EDHEC 2016 (Problème) (Étude d'une chaine de Markov avec réduction pour calculer la puissance n -ième de la matrice) (★)

Fonction génératrice

- EDHEC 2019 (Problème, Partie I) (Étude du lien entre l'espérance, la variance et les dérivées de la fonction génératrice) (★★)

3.2. Probabilités continues

Loi de Gumbel

- Ecricome 2022 (Problème, Partie I) (Propriétés élémentaires de la loi de Gumbel)
- Maths II (Partie 2, Question 7 à 10) (Densité de la loi de Gumbel et convergence du maximum de loi exponentielle)

Maximum de lois uniformes

Il faut savoir calculer la fonction de répartition d'un maximum d'une suite de variable aléatoire.

- EDHEC 2017 (Exercice 2) (Étude de la convergence du maximum de lois uniformes sur $[0, 1]$) (★)

Loi de Cauchy

- EM Lyon 2017 (Partie IV) (Étude de la loi de Cauchy et la convergence du maximum d'une suite de loi de Cauchy) (★★)
- Ecricome 2015 (Partie B) (Étude de quelques propriétés de la loi de Cauchy)
- Maths II 2017 (Partie II) (Loi de Cauchy à paramètres)

3.3. Convergence de variables aléatoires

Polynômes de Bernstein

- HEC 2017 (Question 3)

3.4. Estimation

Estimateur du maximum de vraisemblance

- Maths II 2020 (Partie II) (Étude de l'estimateur de maximum de vraisemblance de lois géométriques)
- EDHEC 2016 (Exercice 3) (Étude de l'estimateur de maximum de vraisemblance de lois normales)

4. Informatique / Python

4.1. Suites numériques

Calcul de somme / produit

- EM Lyon 2019 (Partie E, question 17) (Calcul d'une somme)
- EDHEC 2020 (Problème partie 1, question 1a, question 3cii) (Calcul d'une somme de suite)
- Ecricome 2022 (Exercice 1, question 1b) (Calcul d'une somme de fonctions)

Approximation par une suite

- Ecricome 2012 (Approximation de la limite d'une suite)
- Ecricome 2015 (Approximation de π à l'aide de deux suites récurrentes)
- EM Lyon 2016 (Approximation d'une valeur par une suite dépendant d'un paramètre)

4.2. Probabilités

Méthode d'inversion

- EDHEC 2012 (Exercice 2, question 5) (Simulation d'une nouvelle loi par la méthode d'inversion)
- EM Lyon 2012 (Problème 2 partie II, question 5) (Simulation d'une nouvelle loi par la méthode d'inversion)
- Ecricome 2022 (Problème partie I, question 4) (Simulation de la loi de Gumbel par la méthode d'inversion)

Simulation d'une expérience aléatoire

- Ecricome 2014 (Problème partie 1, question 1) (Simulation d'une expérience aléatoire)
- Ecricome 2016 (Problème partie B, question 4) (Simulation d'une expérience aléatoire)

Estimation d'une probabilité

- EM Lyon 2018 (Problème 1 partie IV, question 10) (Estimation de loi de Poisson pour estimer une probabilité)

Formulaire d'identités classiques

Formule 1.

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Preuve:

Soit $\varphi : x \mapsto \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$.

φ est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + -\frac{1}{x^2} \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

φ est de dérivée nulle sur l'intervalle $]0, +\infty[$ donc φ est constant sur $]0, +\infty[$. On a $\varphi(1) = 2 \arctan(1) = \frac{\pi}{2}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \varphi(x) = \frac{\pi}{2}$. $\square$

Formule 2.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |xy| \leq \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$$

Preuve:

Soit $x, y \in \mathbb{R}$, On a $(|x| - |y|)^2 \geq 0$ donc en développant on a $x^2 + 2|xy| + y^2 \geq 0$ d'où en isolant $|xy|$,

$$|xy| \leq \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$$

$\square$

Formule 3 (Inégalité de convexité).

- $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sin(x) \leq x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$
- $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ln(1+x) \leq x$

Preuve: L'idée est à chaque fois la même : Utiliser l'inégalité des accroissements finis.

- Soit $f : t \mapsto \sin(t)$ et $x \in \mathbb{R}^+$, f est dérivable sur $[0, x]$, alors par inégalité des accroissements finis :

$$|\sin(x) - \underbrace{\sin(0)}_{=0}| \leq \sup_{t \in [0, x]} |\sin'(t)| \times |x - 0|$$

Or on a $\forall t \in [0, x], \sin'(t) = \cos(t)$ qui est bornée par 1 donc $\sup_{t \in [0, x]} |\sin'(t)| \leq 1$ d'où

$\forall x \in \mathbb{R}^+, |\sin(x)| \leq x$.

Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) \geq 0$ donc on a l'inégalité $\sin(x) \leq x$.

Pour $x > \frac{\pi}{2}$, alors $1 \leq x$, donc $\sin(x) \leq x$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sin(x) \leq x$. □

Formule 4.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Preuve: On effectue le calcul directement,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

□

Formule 5.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

Preuve: On utilise la formule d'addition du cosinus :

$$\cos(a+b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

Puis on additionne les formules pour obtenir $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos(a) \cos(b)$. □

Remarque 1. Une fois qu'on connaît cette formule, on peut retrouver les formules donnant $\sin(a) \sin(b)$ et $\sin(a) \cos(b)$ en utilisant la relation $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a)$.