Formes linéaires et dualité

Geoffrey Deperle

Table des matières

Introduction

Lorsque l'on commence à étudier les systèmes d'équations linéaires, on a pour habitude de chercher à déterminer une base de solution d'un système. Pourtant, la description d'un espace vectoriel à partir d'un système d'équations apporte un point de vue géométrique fructueux, on étudie alors un espace vectoriel à partir de propriétés linéaires qu'il vérifie : plus précisément un espace vectoriel peut être déterminé comme les zéros d'une famille de formes linéaires.

Ainsi, pour construire un vecteur vérifiant certaines propriétés, il est parfois avantageux de traduire cette propriété dans l'espace dual afin d'utiliser des résultats d'algèbre linéaire sur cet espace. Par correspondance entre un espace vectoriel et son espace dual, on peut alors remonter à notre espace initial. La théorie de l'interpolation de Lagrange ou des polynômes de Hilbert sont par exemple des illustrations de cette idée.

L'autre avantage de cette vision géométrique est l'idée que l'on peut généraliser des notions de nature euclidienne. Parmi elles, la notion d'orthogonalité qui permet d'étudier les espaces de dimension k en étudiant des espaces de dimension $n - k$.

1 Forme linéaire et hyperplans

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque et $\mathbb{K}$ un corps quelconque de caractéristique différente de 2.

1.1 Formes linéaires : Généralités

1.1.1 Définition et premiers exemples

Définition 1. Une forme linéaire sur E est un élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, autrement dit une application linéaire $\varphi : E \to \mathbb{K}$.
On appelle dual de E est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. On le note E^*.

Exemple 2. L'application

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x + 2y - z \end{array}$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$.

Exemple 3. L'application tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 4. L'application

$$I \ : \ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$.

1.1.2 Application transposée

On aimerait "traduire" l'effet d'une application linéaire dans notre espace dual. Pour cela, vient la notion de transposée qui permet de faire commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E} \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "{}^t u(\varphi)"'] & \mathrm{F} \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Définition 5. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle transposée de u noté ${}^t u$ l'application ${}^t u \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ définie par

$${}^t u \ : \ \begin{array}{ccc} F^* & \to & E^* \\ \varphi & \mapsto & \varphi \circ u \end{array}$$

Exemple 6. Soit

$$u \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X + 1) \end{array}$$

On a pour $\varphi \in \mathbb{K}_n[X]$, ${}^t u(\varphi) = \varphi \circ u$ d'où $\forall P \in \mathbb{K}_n[X]$, ${}^t u(\varphi)(P) = \varphi(P(X + 1))$.

1.2 Hyperplans

1.2.1 Définition et propriétés

Définition 7. On appelle **hyperplan** de E le noyau d'une forme linéaire non identiquement nulle.

Exemple 8. L'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$ est un hyperplan en tant que noyau de la forme linéaire $\varphi : (x, y, z) \mapsto x - 2y + 3z$.

Notons que dans un espace vectoriel de dimension n, un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle donc de rang 1, d'après le théorème du rang, un hyperplan est donc de dimension $n - 1$. La réciproque est vraie : tout sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$ est un hyperplan.

Proposition 9. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, H un sous-espace vectoriel de E.*

$$H \text{ est un hyperplan de } E \iff \dim H = n - 1$$

Preuve : Le sens direct est une conséquence du théorème du rang. Montrons le sens réciproque.
Soit H un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$, il s'agit de construire une forme linéaire φ tel que $H = \mathrm{Ker}\varphi$.
Soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de H que l'on complète en une base $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$. La forme linéaire φ définie sur cette base comme $\varphi(e_i) = 0$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$ et $\varphi(e_n) = 1$ est une forme linéaire non nulle dont le noyau est H. □

Remarque 10. En dimension quelconque, on a le résultat suivant : H est un hyperplan de E $\iff$ $\mathrm{codim} H = 1$. (La codimension étant définie par la dimension de l'espace quotient E/H)

Ainsi, en dimension finie, tout hyperplan admet un supplémentaire qui est une droite vectorielle. Ce résultat est en réalité toujours vrai même sans l'hypothèse de dimension :

Théorème 11. *Soit H un hyperplan de E, il existe $x_0 \in E$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}x_0$. Ainsi, tout hyperplan admet un supplémentaire de dimension 1.*

Preuve : Soit φ tel que $H = \mathrm{Ker}\varphi$. Comme φ est non-identiquement nulle, il existe x_0 tel que $\varphi(x_0) \neq 0$. Montrons que $E = H \oplus \mathbb{K}x_0$.
Analyse :
Soit $x \in E$, si x admet une décomposition de la forme $x = x_H + \lambda x_0$ avec $x_H \in H$.
En appliquant φ, on a $\varphi(x) = \lambda\varphi(x_0)$ d'où comme $\varphi(x_0) \neq 0$, on a $\lambda = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}$. On a alors $x_H = x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0$.
Synthèse :
En posant $x_H = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} x_0$ et $\lambda = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}$. On a alors bien $x = x_H + \lambda x_0$ et $x_H \in \mathrm{Ker}\varphi$.
D'où $E = H + \mathbb{K}x_0$.
Et la somme est directe car comme $x_0 \notin H$, on a $H \cap \mathbb{K}x_0 = \{0\}$. □

On peut également caractériser les formes linéaires avec leurs hyperplans :

Proposition 12. *Soit φ et ψ deux formes linéaires tel que* $\mathrm{Ker}\psi \subset \mathrm{Ker}\varphi$ *si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda\psi$.*

Preuve : Si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda\psi$ alors pour tout $x \in \mathrm{Ker}\psi$, $\varphi(x) = \lambda\psi(x) = 0$.
Supposons que $\mathrm{Ker}\psi \subset \mathrm{Ker}\varphi$.
Si $\psi = 0$, alors $\mathrm{Ker}\psi = E$ d'où $\mathrm{Ker}\varphi = E$ d'où $\varphi = 0$ et tout λ convient.
Si $\psi \neq 0$, il existe x_0 tel que $\psi(x_0) \neq 0$, posons $\lambda = \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}$. Montrons que ce λ convient.
D'après la propriété précédente, on a la décomposition $E = \mathrm{Ker}\psi \oplus \mathbb{K}x_0$. Pour montrer que $\varphi = \psi$, montrons qu'ils coïncident sur $\mathrm{Ker}\psi$ et sur $\mathbb{K}x_0$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}\psi$, alors $\varphi(x) = 0$ car $\mathrm{Ker}\psi \subset \mathrm{Ker}\varphi$.
Soit $x \in \mathbb{K}x_0$, il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $x = \mu x_0$, d'où $\varphi(x) = \mu\varphi(x_0) = \mu\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}\psi(x_0)$. Donc les deux applications coïncident sur $\mathbb{K}x_0$.
Ainsi, il existe λ tel que $\varphi = \lambda\psi$. $\square$

Exemple 13. Supposons qu'il existe $u \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ tel que pour toute fonction $v \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, tel que $\displaystyle\int_0^1 v(t)\,\mathrm{d}t = 0$, on a $\displaystyle\int_0^1 u(t)v(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Alors u est constant.
En effet, posons $\psi : v \mapsto \displaystyle\int_0^1 v(t)\,\mathrm{d}t$ et $\varphi : v \mapsto \displaystyle\int_0^1 u(t)v(t)\,\mathrm{d}t$.
L'hypothèse se traduit par $\mathrm{Ker}\psi \subset \mathrm{Ker}\varphi$ donc d'après le théorème, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \lambda\psi$. Donc $\forall v \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \displaystyle\int_0^1 (u(t)-\lambda)v(t)\,\mathrm{d}t = 0$. En particulier pour $v = u - \lambda$, on a $\displaystyle\int_0^1 (u(t)-\lambda)^2\,\mathrm{d}t = 0$. Donc comme $t \mapsto (u(t)-\lambda)^2$ est continue sur $[0,1]$ d'intégrale nulle, on a $\forall t \in [0,1], u(t) = \lambda$.

1.2.2 Intersections d'hyperplan

Proposition 14. *Soit $H_1, \ldots, H_k$ k hyperplans distincts de E. On a* $\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_k) \geq n - k$.

Preuve : Pour $i \in [\![1,n]\!]$, $H_i = \mathrm{Ker}\varphi_i$.
Posons $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$.
On a $x \in \mathrm{Ker}\varphi \iff \forall i \in [\![1,n]\!] x \in \mathrm{Ker}\varphi_i \iff x \in H_1 \cap \cdots \cap H_k$.
D'après le théorème du rang, on a $\dim \mathrm{Ker}\varphi = \dim E - \mathrm{rg}\varphi$. Or comme $\mathrm{Im}\varphi \subset \mathbb{K}^k$, on a $\mathrm{rg}\varphi \leq k$ d'où $\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_k) \geq n - k$. $\square$

Ce théorème admet une interprétation géométrique. En effet, chercher les solutions d'un système d'équations linéaires $AX = 0$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

revient à déterminer l'espace définie comme l'intersection des hyperplans H_i définie par l'équation $H_i : a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0$.
Le théorème précédent permet de minorer la dimension de l'espace des dimensions : au maximum la dimension du nombre de solution est égale au nombre d'inconnus moins le nombre

d'équations.

Application 15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice trigonalisable. Calculer la dimension du commutant de A revient à déterminer la dimension de S l'ensemble des solutions de l'équation

$$AX - XA = 0$$

où l'inconnue est $X = (X_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Quitte à se placer dans une nouvelle base, on peut supposer A triangulaire supérieure. En restreignant le système à $T_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, nous avons $\frac{n(n+1)}{2}$ inconnues. Comme $AX - XA$ est triangulaire supérieure, dire que X est solution revient à écrire $\frac{n(n+1)}{2}$ équations correspondant à la nullité des coefficients de $AX - XA$ dans la partie supérieure. Or, on peut retirer n équations traduisant la nullité des coefficients diagonaux. Ce système homogène a donc seulement $\frac{n(n+1)}{2} - n =$ équations pour $\frac{n(n+1)}{2}$ inconnues. Donc l'espace des solutions est au moins de dimension n.

Ce théorème admet une réciproque :

Proposition 16. *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension $n-k$, il existe k hyperplans $H_1, \ldots, H_k$ tel que $F = H_1 \cap \cdots \cap H_k$.*

Preuve : Montrons ce résultat par récurrence sur k.
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$, alors F est un hyperplan donc la propriété est vraie.
Supposons que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ tel que pour tout sous-espace vectoriel de dimension $n-k$ est intersections de k hyperplans de E.
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension $n-(k+1)$.
Soit $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin F$, F et $\mathbb{K}x_0$ sont donc en somme directe et $\dim(F \oplus \mathbb{K}x_0) = n-k$ donc par hypothèse de récurrence, il existe $H_1, \ldots, H_k$ tel que $F \oplus \mathbb{K}x_0 = H_1 \cap \cdots \cap H_k$.
Soit G un supplémentaire de $F \oplus \mathbb{K}x_0$, on a $E = (G \oplus F) \oplus \mathbb{K}x_0$.
Posons $H_{k+1} = G \oplus F$ de dimension $n-1$ donc H_{k+1} est un hyperplan de E.
Montrons que $F = H_1 \cap \cdots \cap H_k \cap H_{k+1}$.
Soit $x \in F$, on a $x \in G \oplus F$, donc $x \in H_{k+1}$ et $x \in F \oplus \mathbb{K}x_0 = H_1 \cap \cdots \cap H_k$ d'où $x \in H_1 \cap \cdots \cap H_k \cap H_{k+1}$.
Soit $x \in H_1 \cap \cdots \cap H_k \cap H_{k+1}$, donc $x \in F \oplus G$ et $x \in F \oplus \mathbb{K}x_0$. Comme on a $E = F \oplus G \oplus \mathbb{K}x_0$, par unicité de la décomposition, on a $x \in F$.
D'où la décomposition de F. □
Ce théorème montre la grande idée de la dualité : on peut concevoir un espace vectoriel par un système de générateur (équations paramétriques) ou adopter le point de vue dual et concevoir un espace vectoriel par un système d'équations (équations cartésiennes).

1.3 Interlude topologique

Dans cette section, E est muni d'une norme $||.||$ et on désigne par $|||.|||$ la norme triple associée à cette norme.

Théorème 17. *Soit f une forme linéaire de E, f est continue si et seulement si* $\mathrm{Ker} f$ *est fermée*

Preuve : Si f est continue, alors comme $\text{Ker}f = f^{-1}(\{0\})$ est fermé en tant qu'image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue f.
Supposons $\text{Ker}f$ fermé, montrons que f est continue. Par l'absurde, supposons f non continue, alors f n'est pas bornée sur la sphère unité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in S, |f(x_n)| > n$$

En particulier, $x_n \notin \text{Ker}f$,
Soit $u \in E$, on a la décomposition $u = (u - \dfrac{f(u)}{f(x_n)}x_n) + \dfrac{f(u)}{f(x_n)}x_n$ avec $u - \frac{f(u)}{f(x_n)}x_n \in \text{Ker}(f)$.
Or, $||\frac{f(u)}{f(x_n)}x_n|| = |\frac{f(u)}{f(x_n)}| \leq \frac{|f(u)|}{n}$ donc la suite $u - \frac{f(u)}{f(x_n)}x_n \lim\limits_{n \to +\infty} u$.
Or, comme $\text{Ker}(f)$ est fermé, on a $u \in \text{Ker}(f)$, u étant quelconque, f est l'application nulle ce qui contredit la non-continuité de f. □

Remarque 18. Dans le cas de la dimension finie, toute forme linéaire est continue.

Dans le cas où cette condition est remplie, on peut calculer explicitement la norme de la forme linéaire. Cette norme dépend de la distance entre un élément $x_0 \notin \text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}f$.

Proposition 19. *Soit f une forme linéaire continue non nulle sur E et soit $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$.*

$$|||f||| = \frac{|f(x_0)|}{\text{d}(x_0, \text{Ker}f)}$$

Preuve : Comme $x_0 \notin \text{Ker}f$, on a $d(x_0, \text{Ker}f) > 0$. Pour $x \in \text{Ker}$, $|f(x_0) = |f(x_0) - f(x)| \leq |||f|||\text{d}(x_0, \text{Ker}f)$. D'où en passant à la borne inférieure, $|f(x_0)| \leq |||f|||\text{d}(x_0, \text{Ker}f)$.
Montrons l'inégalité inverse, soit $x \in \mathbb{E}$, en utilisant la décomposition $x = \lambda x_0 + y$ avec $\lambda = \frac{f(x)}{f(x_0)}$.
Or,

$$\frac{||x||}{\lambda} = ||x_0 + \frac{1}{\lambda}y|| \geq d(x_0, \text{Ker}f)$$

. En utilisant l'expression de λ,

$$\frac{|f(x)|}{|f(x_0)|} \leq \frac{||x||}{d(x_0, \text{Ker}f)}$$

donc $|f(x)| \leq ||x|| \times \frac{|f(x_0)|}{d(x_0, \text{Ker}f)}$. D'où la majoration pour la norme triple $|||f||| \leq \frac{|f(x_0)|}{d(x_0, \text{Ker}f)}$. □

2 Bases duales en dimension finie

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

2.1 Bases duales

Si E est de dimension finie, on a $\dim(E^*) = \dim(E)$ donc l'espace vectoriel E et son dual E^* sont isomorphes. Nous allons exhiber un isomorphisme :

Fixons une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Nous allons poser pour $i \in [\![1, n]\!]$, e_i^* définie sur la base $\mathcal{B}$ par :

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La forme linéaire e_i^* est appelée $i^{\text{ème}}$ **forme linéaire coordonnées** selon la base $\mathcal{B}$. En effet, pour $x \in E$ $e_i^*(x)$ donne la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de x dans la base $\mathcal{B}$. On a alors

Proposition 20. *La famille $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* appelée **base duale** de $\mathcal{B}$.*

Preuve : Montrons que c'est une famille libre.
Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* = 0$.
Montrons que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.
Soit $j \in [\![1, n]\!]$, en évaluant la fonction $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^* = 0$ en e_j, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i^*(e_j) = \lambda_j = 0$$

d'où $\forall j \in [\![1, n]\!], \lambda_j = 0$. La famille est donc libre. Comme c'est une famille libre de n vecteurs dans un espace de dimension n, il s'agit d'une base de E^*. $\square$

On dispose ainsi de la décomposition suivante : pour toute forme linéaire $\varphi \in E^*$,

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*$$

avec pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(e_j) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*(e_j)\right) = a_j$. En déduit la décomposition suivante :

$$\forall \varphi \in E^*, \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$$

Cette égalité peut s'écrire matriciellement : En écrivant pour $x \in E$: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.L'écriture de la matrice de x dans la base $\mathcal{B}$: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ nous invite à considérer la matrice φ comme un

vecteur ligne $\begin{pmatrix}\varphi(e_1) & \dots & \varphi(e_n)\end{pmatrix}$.
L'égalité s'écrit alors

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix}\varphi(e_1) & \dots & \varphi(e_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$$

Remarque 21. On peut noter un premier point de la dualité, si on considère les vecteurs comme des vecteurs colonnes, on considère plutôt les formes linéaires comme des vecteurs lignes. Bien que les notations soient isomorphes, écrire les choses ainsi permet de comprendre la relation entre les formes linéaires et les vecteurs.

L'application $\Psi_{\mathcal{B}}$ qui transforme e_i en e_i^* est un isomorphisme d'espaces vectoriels et on dispose ainsi d'une famille infinie d'isomorphismes entre E et E^*.

Remarque 22. L'isomorphisme entre E et son dual E^* n'est vrai qu'en dimension finie. En effet pour l'espace vectoriel des polynômes $\mathbb{K}[X]$, on a $\mathbb{K}[X]^* \simeq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. En effet,

$$\Psi \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{K}[X]^* \\ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \Psi_a \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K} \\ P = \sum_{i=1}^{r} p_i X^i & \mapsto & \sum_{i=1}^{r} p_i a_i \end{array} \end{array}$$

Ψ est bien linéaire et injective et est surjective car pour $\varphi \in \mathbb{K}[X]^*$, on prend $a_n = \varphi(X^n)$ et on a alors $\Psi_a = \varphi$. Mais les deux espaces ne sont pas isomorphes car $\mathbb{K}[X]$ est de dimension dénombrable alors que $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est non-dénombrable. On retiendra qu'il existe toujours une injection entre E et son dual E^* donc l'espace dual est toujours "plus grand" que l'espace initial.

2.1.1 Matrice de l'application transposée dans la base duale

L'écriture des formes linéaires coordonnées permet d'écrire plus facilement l'expression des coefficients de la matrice d'une application linéaire :

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension n et m de base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_m)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Les formes linéaires coordonnées permettent de donner une expression des coefficients de la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Proposition 23. *Soit $M = (m_{ij}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$. On a*

$$m_{ij} = f_j^*(u(e_i))$$

.

Preuve : Il s'agit de la définition de la matrice d'une application linéaire dans une base. □
Cette caractérisation permet d'étudier la matrice de l'application transposée exprimé dans les bases duales :

Proposition 24. *Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{B}_1$ une base de E et $\mathcal{B}_2$ une base de F. Si M est la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ alors ${}^tM$ est la matrice de ${}^tu$ dans les bases duales $\mathcal{B}_2^*$ et $\mathcal{B}_1^*$.*

Preuve : Calculons ${}^tu(f_i^*)$.

$$\begin{aligned} {}^tu(f_i^*) &= f_i^* \circ u \\ &= \sum_{j=1}^n (f_i^* \circ u)(e_j)e_j^* \\ &= \sum_{j=1}^n f_i^*(u(e_j))e_j^* \\ &= \sum_{j=1}^n m_{ji}e_j^* \end{aligned}$$

D'où le coefficient (i,j) de la matrice de ${}^tu$ est

$$e_j^{**}(u(f_i^*)) = e_j^{**}\left(\sum_{k=1}^n m_{ki}e_k^*\right) = \sum_{k=1}^n m_{ki}(e_j^{**}(e_k^*)) = m_{ji}$$

D'où il s'agit de la transposée de la matrice M. □

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 25. *Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$*
- $\mathrm{rg}({}^tu) = \mathrm{rg}(u)$
- *Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $\det(u) = \det({}^tu)$.*

Proposition 26. *Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$ alors ${}^t(uv) = {}^tv{}^tu$.*

Preuve : Soit $\varphi \in F^*$, on a

$${}^tv{}^tu(\varphi) = {}^tv(\varphi \circ u) = \varphi \circ u \circ v = \varphi \circ (u \circ v) = {}^t(uv)(\varphi)$$

□

Remarque 27. Cette propriété est bien compatible avec la représentation matricielle des applications transposées.

2.2 Exemples : dualité de certains espaces vectoriels

D'après ce qui précède en fixant une base $(e_1, \ldots, e_n)$, on a pour toute forme linéaire φ,

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i)e_i^*.$$

Appliquons ceci sur différents espaces

2.2.1 $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$

En prenant $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ les vecteurs de la base canonique, on a donc d'après la formule pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) x_i$$

Remarque 28. L'exemple 1 étant une forme linéaire donnée sous cette forme. Le théorème montre que toutes les formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$ sont de cette forme.

2.2.2 $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})$

Considérons la base formée des matrices élémentaires E_{ij}. D'après la formule pour $M \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})$, on a pour tout $\varphi \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})^*$,

$$\varphi(M) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(E_{ij}) M_{ij}$$

Posons A la matrice des $\varphi(E_{ji})$, on a :

$$\varphi(M) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} A_{ji} M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (AM)_{ii} = \mathrm{tr}(AM)$$

Ainsi :

Proposition 29. *Pour toute forme linéaire $\varphi \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})^*$, il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{K})$ tel que pour tout $M \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K}), \varphi(M) = \mathrm{tr}(AM)$.*

Cela permet de voir le dual de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})$ comme $\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{K})$.

Application 30 (Tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$)**.** Soit H un hyperplan de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Il existe une forme linéaire $\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ tel que $H = \ker \varphi$. Or, il existe $A \in \mathcal{M}_n \mathbb{K}$ tel que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(M) = \mathrm{tr}(AM)$. Il s'agit alors de trouver une matrice M tel que $\mathrm{tr}(AM) = 0$.
Soit $r = \mathrm{rg}(A)$, il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PJ_rQ$ avec $J_r = \begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & 0. \end{pmatrix}$. D'où $\mathrm{tr}(AM) = \mathrm{tr}(PJ_rQM) = \mathrm{tr}(J_rQMP)$. Posons X la matrice de permutation associé au cycle $(1 \ldots n)$ qui est inversible, la matrice J_rX est de trace nulle. Donc, en posant $M = Q^{-1}XP^{-1}$. On a $\mathrm{tr}(AM) = 0$.

2.3 Base Bidual : applications

Problème d'isomorphisme entre E et E^* On a vu que E et E^* sont isomorphes et on a exhibé une infinité d'isomorphismes $\Psi_{\mathcal{B}}$ mais tous ces isomorphismes dépendent d'un choix de base. Ainsi, si on veut identifier un élément x de E à un élément x^* de E^*, on est obligé de se fixer une base, ce qui est contraignant.
En réalité, il n'existe pas d'isomorphisme (appelé isomorphisme canonique) qui soit indépendant du choix de la base. C'est-à-dire qu'il n'existe pas d'isomorphisme envoyant toute base sur sa base duale.

Lemme 31. *Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}_2 = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E. Soit u l'unique endomorphisme envoyant les e_i sur les f_i. Alors $\Psi_{\mathcal{B}_1} = {}^t u \Psi_{\mathcal{B}_2} u$.*

Preuve : Montrons que les deux applications coïncident sur la base $\mathcal{B}_1$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$

$$\begin{aligned}({}^t u \Psi_{\mathcal{B}_2} u)(e_i) &= {}^t u \Psi_{\mathcal{B}_2}(f_i) \\ &= {}^t u(f_i^*) \\ &= f_i^* \circ u \\ &= e_i^*\end{aligned}$$

□

Ainsi en notant M la matrice de u, on a $\Psi_{\mathcal{B}_1} = \Psi_{\mathcal{B}_2} \iff {}^t M M = I_n$.

Supposons qu'il existe un isomorphisme "universel" qui envoie toute base sur sa base duale. On a pour toute matrice inversible ${}^t M M = I_n$. Absurde. Donc un tel isomorphisme n'existe pas.

Cependant, fait stupéfiant, il existe un isomorphisme canonique entre l'espace E et l'espace dual du dual E.

Définition 32. On appelle **bidual** de E le dual de l'espace dual E^* noté E^{**}. Il s'agit de l'ensemble des formes linéaires sur l'ensemble des formes linéaires de E.

Proposition 33. *L'application*

$$J : \begin{array}{ccc} E & \to & E^{**} \\ x & \mapsto & \tilde{x} : \begin{array}{ccc} E^* & \to & \mathbb{K} \\ \varphi & \mapsto & \varphi(x) \end{array} \end{array}$$

est isomorphisme d'espaces vectoriels.

Preuve : Montrons l'injectivité.
Soit $x, y \in E$ tel que $\tilde{x} = \tilde{y}$ on a donc $\forall \varphi \in E^*, \tilde{x}(\varphi) = \tilde{y}(\varphi)$ d'où $\varphi(x) = \varphi(y)$ d'où $\varphi(x-y) = 0$. Par l'absurde si $x - y \neq 0$ alors $(x - y)$ forme une famille libre, donc en la complétant une base $\mathcal{B}$, et prenons φ la forme coordonnées de $x - y$ dans la base $\mathcal{B}$, on a $\varphi(x - y) = 0$. Absurde. D'où $x - y = 0$. L'application est injective.
Comme $\dim E = \dim(E^{**})$, l'application est un isomorphisme. □

Remarque 34. La surjectivité de cette application montre que toute application φ de E^{**}, il existe un unique x dans E tel que $\varphi = \tilde{x}$.

Remarque 35. On peut noter que cette isomorphisme ne dépend d'aucun choix de base. Il s'agit alors d'un isomorphisme dit canonique. On peut ainsi "identifier" chaque élément x de E avec $\tilde{x} \in E^{**}$. On peut ainsi voir un vecteur comme une application linéaire sur l'ensemble des formes linéaires sur E.

La bidualité permet par exemple de construire une base de vecteurs à partir d'une base de forme linéaires sur un espace vectoriel :

Proposition 36. *Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de E^*, il existe une unique famille $(e_1, \dots, e_n)$ appelée* ***base antéduale*** *de $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ tel que $\forall i, j \in [\![1, n]\!], \varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$*

Preuve : Il suffit de prendre la base duale $(\varphi_1^*, \ldots, \varphi_n^*)$ de $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ qui est une base de E^{**}. Posons pour $i \in [\![1, n]\!], e_i = J^{-1}(\varphi_i^*)$.
On a alors pour $i, j \in [\![1, n]\!], \varphi_i(e_j) = \varphi_i(J^{-1}(\varphi_j^*)) = J(J^{-1}(\varphi_j^*))(\varphi_i) = \varphi_j^*(\varphi_i) = \delta_{ij}$.
L'unicité vient de la proposition 1. $\square$

Proposition 37. *Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}^*$ sa base duale. Alors pour tout $x \in E$, on a $\tilde{x} = (\Psi_{\mathcal{B}^*} \circ \Psi_{\mathcal{B}})(x)$.*

Preuve : Notons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$. Notons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ la décomposition de x dans $\mathcal{B}$.
On a

$$\Psi_{\mathcal{B}^*}((\Psi_{\mathcal{B}}(x))) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i^{**}$$

Soit $\varphi \in E^*$, décomposons φ dans la base $\mathcal{B}^*$: $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$.

$$\begin{aligned}
\Psi_{\mathcal{B}^*}((\Psi_{\mathcal{B}}(x)))(\varphi) &= \sum_{i=1}^{n} x_i e_i^{**} \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi(e_j) e_j^* \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \varphi(e_j) e_i^{**}(e_j^*) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) \\
&= \varphi(x)
\end{aligned}$$

$\square$

Ainsi, peu importe la base que l'on prend, en itérant deux fois l'isomorphisme Ψ, on retrouve la même application.

Notons la symétrie de l'écriture : pour $x \in E$, $\varphi \in E^*$, $\varphi(x) = \tilde{x}(\varphi)$. Cette symétrie nous incite à adapter la notation suivante :

Définition 38. Soit $x \in E$, $\varphi \in E^*$, on note $\langle x, \varphi \rangle$ le **crochet de dualité** que l'on définit par

$$\langle x, \varphi \rangle = \varphi(x) = \tilde{x}(\varphi)$$

Remarque 39. Cette notation n'est pas sans rappeler celle du produit scalaire : il s'agit d'une application linéaire par rapport à chaque variable et symétrique. La différence fondamentale est qu'il s'agit d'une application bilinéaire sur $E \times E^*$ et pas sur $E \times E$.

L'identification entre un espace et son bidual peut se voir également avec l'application transposée :

Proposition 40. *Notons J l'application $J : x \mapsto \tilde{x}$. On a, pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$, ${}^t({}^t u) = J \circ u \circ J^{-1}$.*

Preuve : On a ${}^t({}^t u) \in \mathcal{L}(E^{**}, F^{**})$.
Soit $\tilde{x} \in E^{**}$, on a $(J \circ u \circ J^{-1})(\tilde{x}) = J(u(x)) = \widetilde{u(x)}$.

Or, ${}^t({}^tu)(\tilde{x}) = \tilde{x} \circ {}^tu$, pour $\varphi \in E^*$, on a $(\tilde{x} \circ {}^tu)(\varphi) = \tilde{x}(\varphi \circ u) = (\varphi \circ u)(x) = \varphi(u(x))$ donc on a ${}^t({}^tu)(\tilde{x}) = \widetilde{u(x)}$. □

Cette proposition permet donc d'identifier une application linéaire avec la transposée de sa transposée.

Nous présentons également un lemme, très utile pour plusieurs preuves, dont la preuve nécessite la notion de base antéduale :

Proposition 41. *Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ k-formes linéaires indépendantes, et $\varphi \in E^*$, on a*

$$\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\varphi_i \subset \mathrm{Ker}\varphi \iff \varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$$

Preuve : ($\Longleftarrow$) Soit $\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tel que $\varphi = \lambda_1\varphi_1 + \dots + \lambda_n\varphi_n$. Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\varphi_i$, on a $\varphi(x) = \lambda_1\varphi_1(x) + \dots + \lambda_n\varphi_n(x) = 0$ d'où $\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\varphi_i \subset \mathrm{Ker}\varphi$.
($\Longrightarrow$) Supposons que $\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\varphi_i \subset \mathrm{Ker}\varphi$.
La famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ est libre, on peut la compléter en une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de E. φ se décompose selon $\varphi = \lambda_1\varphi_1 + \dots + \lambda_n\varphi_n$.
Considérons la base antéduale $(e_1, \dots, e_n)$ de $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.
Pour tout $i \in [\![k+1, n]\!]$, $\varphi(e_i) = \lambda_i$ et comme $e_i \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\varphi_i$, on a $e_i \in \mathrm{Ker}\varphi$ donc $\lambda_i = 0$. On a donc $\varphi = \lambda_1\varphi_1 + \dots + \lambda_k\varphi_k$ et $\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$. □

2.4 Applications de la bidualité

Nous allons présenter plusieurs applications de la dualité. Pour cela, nous allons utiliser le lemme suivant :

Lemme 42. *Soit $x_1, \dots, x_n$ une famille de E espace de dimension n, et $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ une famille de E^* tel que $\forall i, j \in [\![1, n]\!], \varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$. Alors la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E et $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^*. La base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est alors la base duale de $(x_1, \dots, x_n)$.*

Preuve : Montrons que $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E.
Montrons que c'est une famille libre : soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$. Soit $j \in [\![1, n]\!]$, en appliquant φ_j on a $\varphi_j\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = \lambda_j = 0$. D'où $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre de E et est donc une base de E.
Pour montrer que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^*, pour cela, en considérant la base dual de $(\varphi_1^*, \dots, \varphi_n^*)$, les deux familles vérifient les hypothèses de l'énoncé et donc d'après ce qui a été fait précédemment, il s'agit d'une base de E^*. □

Application 1 : Polynômes interpolateurs de Lagrange Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ n réels distincts on pose pour $i \in [\![1, n]\!]$, le polynôme annulateur de Lagrange :

$$L_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}$$

et posons $\varphi_i : P \mapsto P(\alpha_i)$ la forme linéaire évaluation en α_i.
On peut alors vérifier que $\forall i, j \in [\![1, n]\!], \varphi_i(L_j) = \delta_{ij}$.
Ainsi, la base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est la base duale de $(L_1, \ldots, L_n)$. On a alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P = \sum_{i=1}^n \varphi_i(P) L_i$ d'où :

$$P = \sum_{i=1}^{n} P(\alpha_i) L_i$$

Application 2 : Polynômes de Hilbert Posons Δ l'application de dérivation discrète :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

On définit la famille de forme linéaire $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ définie pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi_i(P) = (\Delta^i(P))(0)$ (qui est bien linéaire par composition d'applications linéaires).

Posons la famille de polynômes de Hilbert (H_n) définie par $H_0 = 1$, $H_1 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$H_n = \frac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{n!}$$

Les polynômes de Hilbert sont compatibles avec l'application Δ avec

$$\begin{aligned} \Delta H_n &= H_n(X+1) - H_n(X) \\ &= \frac{(X+1)X\ldots(X-n+2)}{n!} - \frac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{n!} \\ &= (X+1-(X-n+1))\frac{X\ldots(X-n+2)}{n!} \\ &= \frac{X\ldots(X-n+2)}{(n-1)!} \\ &= H_{n-1}(X) \end{aligned}$$

On en déduit que $\Delta^i H_j = H_{j-i}$ et donc pour tout $i, j \in [\![1, n]\!], \varphi_i(H_j) = \delta_{ij}$. D'après le lemme la base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est la base duale de $(H_1, \ldots, H_n)$. On a alors la décomposition suivante : pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$,

$$P = \sum_{i=0}^{n} \Delta^i P(0) H_i$$

Cette décomposition est utile pour le théorème suivant :

Proposition 43. *Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ si et seulement si il existe $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$ tel que*

$$P = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i H_i$$

Preuve : Le sens réciproque est clair vu qu'on a pour tout $k \in \mathbb{N}, H_k(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
Passons au sens direct, supposons que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, il en est de même pour ΔP. Donc pour tout $i \in \mathbb{N}, \Delta^i P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, en particulier $\Delta^i P(0) \in \mathbb{Z}$ donc d'après la décomposition précédente, en posant $\alpha_i = \Delta^i P(0) \in \mathbb{Z}$, on a la décomposition voulue. $\square$

Application 3 : Formule de Taylor polynômiale

Soit $a \in \mathbb{K}$,

Considérons à présent la famille de polynôme $(Q_0, \ldots, Q_n)$ définie pour $i \in [\![1, n]\!]$ par $Q_i = \dfrac{(X-a)^i}{i!}$ et la famille de formes linéaires $(\varphi_0, \ldots, \varphi_n)$ définie pour $i \in [\![1, n]\!]$ par $\varphi_i = P^{(i)}(a)$. On peut vérifier que l'on a bien $\forall i, j \in [\![1, n]\!], \varphi_i(Q_j) = \delta_{ij}$. Le lemme donne alors la formule suivante, appelée formule de Taylor :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a) \frac{(X-a)^k}{k!}$$

Remarque 44. Notons que la formule du binôme de Newton peut-être vu comme conséquence de cette formule. En effet, en prenant le polynôme $P = X^n$, on a en dérivant successivement $P^{(k)}(a) = \binom{n}{k} k!(a)^{n-k}$ d'où

$$X^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (X-a)^k$$

Donc en $X = a + b$, on a obtient

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

3 Orthogonalité dans les espaces duales

3.1 Orthogonalité : le cas général

Toujours dans l'optique de donner des propriétés géométriques aux espaces vectoriels et dans la logique de la notation du crochet de dualité, nous allons définir l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel de E.

Définition 45. Soit F un sous-espace vectoriel de E, on appelle **orthogonal de** F noté $F^\perp$ l'ensemble

$$F^\perp = \{\varphi \in E^* \,|\, \forall x \in F, \varphi(x) = 0\}$$

Avec la notation du crochet de dualité, on a $F^\perp = \{\varphi \in E^* \,|\, \forall x \in F, \langle \varphi, x\rangle = 0\}$ ce qui coïncide avec la notion d'orthogonalité dans les espaces euclidiens.

Proposition 46. *$F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E^* de dimension* $\mathrm{codim} F = \dim E - \dim F$.

Preuve : Posons $u : \begin{array}{ccc} E^* & \to & F^* \\ \varphi & \mapsto & \varphi_{|F} \end{array}$ u est linéaire et on a $F^\perp = \mathrm{Ker} u$ donc c'est un sous-espace vectoriel de E^*.
De plus, surjective : en effet, soit $\psi \in F^*$. Soit G un supplémentaire de F, on définit une fonction φ sur la décomposition $E = F \oplus G$ par $\varphi(\underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G}) = \psi(x_F)$. On a $\psi = u(\varphi)$.
D'après le théorème du rang, on a $\dim(E^*) = \mathrm{rg} u + \dim \ker u$ d'où $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.
□

Remarque 47. Notons que l'application $F \mapsto F^\perp$ est une involution à identification de l'espace et son bidual près. On a $(F^\perp)^\perp = J(F)$. En effet, on a $(F^\perp)^\perp \subset J(F)$ et par égalité des dimension, on a $(F^\perp)^\perp = J(F)$.

Il existe des résultats liant la transposée d'une application linéaire et l'orthogonal.

Proposition 48. *Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on a*

(i) $\mathrm{Ker}({}^t u) = \mathrm{Im}(u)^\perp$

(ii) $\mathrm{Im}({}^t u) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$

Preuve :

(i) ($\subset$) Soit $\psi \in \mathrm{Ker}({}^t u)$. Montrons que $\psi \in \mathrm{Im}(u)^\perp$. Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. On a $\psi(u(x)) = {}^t u(\psi)(x) = 0$.
($\supset$) Soit $\psi = \mathrm{Im}(u)^\perp$. Montrons que $\psi \in \mathrm{Ker}({}^t u)$. On a ${}^t u(\psi) = \psi \circ u$. Soit $x \in E$, on a $(\psi \circ u)(x) = \psi(u(x)) = 0$ car $\psi \in \mathrm{Im}(u)^\perp$ d'où $\psi \circ u = 0$ et donc $\psi \in \mathrm{Ker}({}^t u)$.

(ii) ($\subset$) Soit $\psi \in \mathrm{Im}({}^t u)$. Il existe φ tel que $\psi = {}^t u(\varphi) = \varphi \circ u$. Soit $x \in \mathrm{Ker} u$, on a $\psi(x) = \varphi(u(x)) = 0$. D'où $y \in \mathrm{Ker}(u)^\perp$.
On a $\dim \mathrm{Im}({}^t u) = \mathrm{rg}({}^t u) = \mathrm{rg} u$ et $\dim \mathrm{Ker}(u)^\perp = \dim E - \dim \mathrm{Ker} u = \mathrm{rg} u$ par théorème du rang donc par égalité des dimensions, on a $\mathrm{Im}({}^t u) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$.

□

On a également un résultat de stabilité, très utile pour des preuves d'existences :

Proposition 49. *Soit $u \in \mathcal{L}(E, E')$ et F un sous-espace vectoriel de E alors*

$$F \text{ est stable par } u \iff F^\perp \text{ est stable par } {}^t u$$

Preuve : Supposons que F est stable par u. Montrons que $F^\perp$ est stable par ${}^t u$. Soit $\varphi \in F^\perp$ et $x \in F$, on a ${}^t u(\varphi)(x) = \varphi(u(x)) = 0$ car $u(x) \in F$ d'où ${}^t u(\varphi) \in F^\perp$.
Le sens réciproque se montre par un argument de bidualité que l'on développera plus tard.
□

Passons à un procédé de construction de l'orthogonal $F^\perp$ ce qui permet de mieux comprendre la notion d'orthogonalité.

Application : Preuve de la CNS de trigonalisabilité Utilisons les propriétés des orthogonaux pour montrer la proposition suivante :

Proposition 50. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé.*

Preuve : L'idée est de construire une base de trigonalisation par récurrence en utilisant un supplémentaire isomorphe à l'orthgonal.

La sens direct est clair par calcul du polynôme caractéristique. Montrons le sens réciproque. Effectuons une récurrence sur la dimension.
Si $\dim E = 1$, alors χ_u est scindé car de degré 1 et u est toujours trigonalisable car sa matrice est un scalaire. D'où la propriété est vrai pour $\dim E = 1$.
Supposons que la propriété est vrai pour tous les espaces vectoriels de dimension $n \in \mathbb{N}$. Montrons qu'elle est vraie pour les espaces de dimension $n + 1$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension $n + 1$.
χ_u est scindé donc admet une racine λ qui est donc valeur propre de u. Soit x_0 un vecteur propre de u associé à λ, la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(x_0)$ est stable par u.
Par la propriété précédente, $\mathrm{Vect}(x_0)^\perp$ est stable par ${}^t u$. L'endomorphisme induit v par ${}^t u$ sur $\mathrm{Vect}(x_0)^\perp$ est un endomorphisme d'un espace de dimension n.
Comme $\chi_{{}^t u} = \chi_u$ (car une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique). et $\chi_v | \chi_{{}^t u}$ qui est scindé, alors χ_v est scindé donc v est trigonalisable par hypothèse.
Il existe une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ tel que la matrice de v dans cette base est triangulaire supérieure. En complétant cette matrice en une base $\mathcal{B}$ de E^*, la matrice de ${}^t u$ dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure donc ${}^t u$ est trigonalisable et donc u est trigonalisable (car sa matrice dans la base antédual de $\mathcal{B}$ est la transposée de la matrice de ${}^t u$ dans $\mathcal{B}$). □

Construction de $F^\perp$

Considérons un sous-espace vectoriel F de dimension k de base $(e_1, \dots, e_k)$.
Considérons sa base duale $(e_1^*, \dots, e_k^*)$. On peut la compléter en une base $(e_{k+1}^*, \dots, e_n^*)$. On a alors $F^\perp = \mathrm{Vect}(e_{k+1}^*, \dots, e_n^*)$.

Preuve : Par égalité des dimensions, il suffit de montrer que pour tout $i \in [\![k+1, n]\!], e_i \in F^\perp$.

Soit $x \in F$, il existe x se décompose dans la base $(e_1, \dots, e_k)$ en $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_j e_j$.

On a $e_i^*\left(\sum_{j=1}^{k} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{k} x_j \underbrace{e_i^*(e_j)}_{=0} = 0.$ $\square$

Nous allons à présent la notion d'orthogonal en tant que sous-espace vectoriel de E :

Définition 51. Soit F un sous-espace vectoriel de E^*, on appelle **orthogonal de** F noté F° l'ensemble

$$F^\circ = \{x \in E \,|\, \forall \varphi \in F, \varphi(x) = 0\}$$

De même, avec la notation du crochet de dualité, on a $F^\circ = \{x \in E \,|\, \forall \varphi \in F^*, \langle \varphi, x\rangle = 0\}$ ce qui coïncide également avec la notion d'orthogonalité dans les espaces euclidiens.

Il y a à présent une ambigüité sur la notion d'orthogonalité : en effet pour F un sous-espace vectoriel de E^*, on peut définir l'orthogonal F° qui est un sous-espace vectoriel de E et l'orthogonal $F^\perp$ qui est un sous-espace vectoriel de E^{**}. Cette ambiguïté est levée par l'identification entre E et son bidual. En effet :

Proposition 52. *Soit F un sous-espace vectoriel de E^*, on a*

$$F^\circ = J^{-1}(F^\perp)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} F^\circ &= \{x \in E \,|\, \forall \varphi \in F, \varphi(x) = 0\} \\ &= \{x \in E \,|\, \forall \varphi \in F, J(x)(\varphi) = 0\} \\ &= \{x \in E \,|\, J(x) \in F^\perp\} \\ &= J^{-1}(F^\perp) \end{aligned}$$

$\square$

Ainsi, on en déduit les propriétés suivantes :

Corollaire 53. *F° est un sous-espace vectoriel de E de dimension* $\mathrm{codim} F = \dim E - \dim F$*.*

Comme $F^\perp$, on peut construire F° "explicitement" :

Construction de F° Considérons un sous-espace vectoriel F de E^* de dimension k de base $(e_1^*, \ldots, e_k^*)$.
Considérons sa base antéduale $(e_1, \ldots, e_k)$ que l'on complète en une base $(e_{k+1}, \ldots, e_n)$. On a alors $F^\circ = \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \ldots, e_n)$.

Preuve :

Par égalité des dimensions, il suffit de montrer que pour tout $i \in [\![k+1, n]\!], e_i \in F^\circ$.

Soit $\varphi \in F$, il existe une décomposition dans la base $(e_1^*, \ldots, e_k^*)$: $\varphi = \sum_{j=1}^{k} \varphi(e_j) e_j^*$.

On a $e_i^*\left(\sum_{j=1}^{k} \varphi(e_j) e_j^*\right) = 0.$ $\square$

Cette construction est symétrique par rapport à la construction de $F^\perp$ pour F sous-espace vectoriel de E. Cela permet d'en déduire les propositions suivantes :

Proposition 54. *Soit F un sous-espace vectoriel de E et G un sous-espace vectoriel de E^*. On a*
- $(F^\perp)^\circ = F$
- $(G^\circ)^\perp = G$

Preuve : Immédiat avec la construction. □

Application 55 (Développement 2)**.** Soit $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$, la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ si et seulement s'il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que la matrice $(f_i(x_j))_{1\leq i,j\leq n}$ soit inversible.

Application 56. Les applications f dérivables tel que les translatés (ie les applications $f_a : x \mapsto f(x+1)$ pour $a \in \mathbb{R}$) engendrent un espace vectoriel de dimension finie sont les solutions d'une équation linéaire homogène à coefficients constants.

Preuve : Commençons par démontrer le lemme,
Si la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est liée, alors pour tous $x_1, \dots, x_n$, les lignes de la matrice $(f_i(x_j))_{1\leq i,j\leq n}$ sont liés.
Supposons que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre, notons $F = \mathrm{Vect} f_1, \dots, f_n$. F est un espace vectoriel de dimension n.
Considérons pour $a \in K$, $e_a : F \to \mathbb{K}$ la forme linéaire d'évaluation en a : $e_a : f \mapsto f(a)$.
On a $F^* = \mathrm{Vect}\{e_a, a \in K\}$, en effet, si $f \in \mathrm{Vect}\{e_a, a \in K\}^\circ$, alors pour tout $a \in \mathbb{K}, e_a(f) = f(a) = 0$ donc $f = 0$ d'où $\mathrm{Vect}\{e_a, a \in K\}^\circ = \{0\}$ et comme F est de dimension finie, on a $\mathrm{Vect} e_a, a \in K^\circ = \{0\}^\perp = F$.
Ainsi, par théorème de la base extraite, considérons $x_1, \dots, x_n$ tel que $(e_{x_1}, \dots, e_{x_n})$ est une base de F^*.
Montrons que $(x_1, \dots, x_n)$ convient,
Soit $M = (f_i(x_j))_{1\leq i,j\leq n}$, montrons que les lignes $(L_i)_{i=1,\dots n}$ forment une famille libre.
Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x_j) = 0 \iff e_{x_j}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i\right)$,
D'où $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i\right) \in \mathrm{Vect}\{e_{x_1}, \dots, e_{x_n}\}^\circ = (F^*)^\circ = \{0\}$ car la famille $(e_{x_1}, \dots, e_{x_n})$ est une base de F^*.
Or, comme $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de F, on a $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Donc la matrice M est inversible.

Passons à la preuve du théorème,
Si f est une solution d'une équation différentielle lnéaire homogène à coefficients constants d'ordre p, alors f_a est également solution pour tout $a \in \mathbb{R}$, . L'ensemble des solutions étant un espace vectoriel de dimension p, par égalité des dimensions les fonctions f_a engendrent un espace vectoriel de dimension inférieure ou égal à p.
Réciproquement, supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables dont les translatées engendrent un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n.
Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $(f_{a_1}, \dots, f_{a_n})$ est une base de F.
D'après le lemme précédent, il existe $x_1, \dots, x_j$ tel que la matrice $M = (f_{a_i}(x_j))_{1\leq i,j\leq n}$ est inversible.
Soit $g \in F$ quelconque, on a $g' \in F$ et pour tout $a \in \mathbb{R}, g_a \in F$ car $g_a \in \mathrm{Vect} f_{a_1+a}, \dots, f_{a_n+a} \subset$

F. Donc il existe $\lambda_1(a), \dots, \lambda_n(a)$ tel que $g_a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(a) f_{a_i}$.
Montrons que les $\lambda_i(a)$ sont dérivables, On a $g(a + x_j) = g_a(x_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(a) f_{a_i}(x_j)$. D'où matriciellement,

$$\begin{pmatrix} g(a+x_1) \\ \vdots \\ g(a+x_n) \end{pmatrix} =^t M \begin{pmatrix} \lambda_1(a) \\ \vdots \\ \lambda_n(a) \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} \lambda_1(a) \\ \vdots \\ \lambda_n(a) \end{pmatrix} =^t M^{-1} \begin{pmatrix} g(a+x_1) \\ \vdots \\ g(a+x_n) \end{pmatrix}$$

Comme les coefficients de M ne dépendent pas de a, les $\lambda_i(a)$ sont dérivables en tant que combinaisons linéaires des g_{x_i}.
Ainsi, comme $\forall x \in \mathbb{R}, g(x + a) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(a) f_{a_i}(x)$, on a en dérivant par rapport à a, $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x + a) = \sum_{i=1}^n \lambda_i'(a) f_{a_i}(x)$.
Pour $a = 0$, on a donc $g' = \sum_{i=1}^n \lambda_i'(0) f_{a_i} \in F$.
Ainsi, F est stable par la dérivation, donc en itérant on a $g \in C^\infty$ et pour tout $k \in \mathbb{N}, g^{(k)} \in F$.
Ainsi pour f, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)} \in F$. Or, $\dim F = n$ donc il existe un entier $p \in [\![1, n]\!]$ tel que $f^{(p)} \in \text{Vect}\{f, f', \dots, f^{(p-1)}\}$ d'où f est solution d'une équation différentielle homogène à coefficients constants. □

Finissons avec quelques propriétés concernant l'intersection et la somme d'orthogonaux.

Proposition 57.

(i) *Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E alors*
- $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
- $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

(ii) *Soit V et W deux sous-espaces vectoriels de E^* alors*
- $(V + W)^\circ = V^\circ \cap W^\circ$
- $(F \cap G)^\circ = V^\circ + W^\circ$

Preuve :

(i) — On a déjà $F \subset F + G$ donc $(F + G)^\perp \subset F^\perp$ et de même $(F + G)^\perp \subset G^\perp$ d'où $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.
Soit $\varphi \in F^\perp \cap G^\perp$, soit $x \in F + G$, il existe $x_F \in F, x_G \in G$ tel que $x = x_F + x_G$. On a alors $\varphi(x) = \varphi(x_F) + \varphi_(x_G) = 0$ d'où $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$ d'où $F^\perp \cap G^\perp =^(F + G)^\perp$.
— On a $F \cap G \subset F$ donc $F^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ et $F \cap G \subset G$ donc $G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ d'où $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.
D'après la formule de Grassmann, on a

$$\dim(F^\perp + G^\perp) = \dim(F^\perp) + \dim(G^\perp) - \dim(F^\perp \cap G^\perp)$$

. Or, d'après ce qui précède, $F^\perp \cap G^\perp = (F + G)^\perp$. D'où $\dim(F^\perp + G^\perp) = \dim E - \dim(F) - \dim(G) + \dim(F+G) = \dim E - \dim(F \cap G)$ d'après la formule de Grassmann, d'où

$$\dim(F^\perp + G^\perp) = \dim((F \cap G)^\perp)$$

il y a donc égalité des deux espaces.

(ii) La preuve est similaire à celle du (i).

□

3.2 Lien avec les espaces euclidiens

Résumons la correspondance entre les notions euclidiennes et la dualité.

E espace euclidien	E espace vectoriel de dimension finie
Produit scalaire définie sur $E \times E$: $$(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$$	**Crochet de dualité** définie sur $E \times E^*$: $$(x,\varphi) \mapsto \langle x,\varphi\rangle = \varphi(x) = \tilde{x}(\varphi)$$
Application adjoint : pour $u \in \mathcal{L}(E,F), u^*$ est l'application de $\mathcal{L}(E,F)$ tel que $$\forall x,y \in E, \langle u(x),y\rangle = \langle x,u^*(y)\rangle$$	**Application transposée :** pour $u \in \mathcal{L}(E,F), {}^t y$ est l'application de $\mathcal{L}(F^*,E^*)$ tel que $$\forall x,y \in E, \langle u(x),\varphi\rangle = \langle x, {}^t u(\varphi)\rangle = \varphi(u(x))$$
Orthogonal d'un sous-espace vectoriel : Pour F un sous-espace vectoriel de E, on définit $F^\perp \subset E$ par $$F^\perp = \{x \in E \,\vert\, \forall y \in F, \langle x,y\rangle = 0\}$$	**Orthogonal d'un sous-espace vectoriel** : Pour F un sous-espace vectoriel de E, on définit $F^\perp \subset E^*$ par $$F^\perp = \{\varphi \in E^* \,\vert\, \forall x \in F, \langle x,\varphi\rangle = 0\}$$ Pour V un sous-espace vectoriel de E^*, on définit $V^\circ \subset E$ par $$V^\circ = \{x \in E \,\vert\, \forall \varphi \in V, \langle x,\varphi\rangle = 0\}$$

Pour finir, le théorème de Riesz fait le lien entre la dualité et les espaces euclidiens en montrant que toute forme linéaire d'un espace euclidien est un produit scalaire contre un vecteur.

Théorème 58. *Soit φ une forme linéaire sur E espace vectoriel euclidien. Il existe un unique vecteur $x \in E$ tel que pour tout $y \in E$, $\varphi(x) = \langle x,y\rangle$.*

Preuve : Il s'agit de montrer que l'application

$$J : \begin{array}{rcl} E & \to & E^* \\ x & \mapsto & J(x) : \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{K} \\ y & \mapsto & \langle x,y\rangle \end{array} \end{array}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.
J est bien linéaire. Montrons que J est injective.
Soit $x \in \mathrm{Ker}J$, on a $\forall y \in E, \langle x,y\rangle = 0$. En particulier pour $y = x$, on a $\langle x,x\rangle = ||x||^2 = 0$ d'où $x = 0$. D'où $\mathrm{Ker}J \subset \{0\}$ et $\mathrm{Ker}J = \{0\}$. Donc J est injective et par égalité des dimensions, J est un automorphisme de E^*. □

Application 59 (Existence du gradient)**.** Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la différentielle $\mathrm{d}f(x)$ est une forme linéaire. D'après la théorème de Riesz, il existe un unique vecteur noté $\nabla f(x)$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, h \in \mathbb{R}^d,\ \mathrm{d}f(x)(h) = \langle \nabla f(x), h\rangle$$

Références

[1] Grégory BERHUY. *Algèbre : le grand combat*. Calvage Mounet, 2018.

[2] Michel COGNET. *Algèbre linéaire*. Bréal, 2000.

[3] Xavier GOURDON. *Les maths en tête : Algèbre*. Ellipses, 2009.

[4] Serge Nicolas SERGE FRANCINOU Hervé Gianella. *Oraux X-ENS, Algèbre 1*. Cassini, 2007.