

235

Problèmes d'intervention de symboles en analyse.

I. Notions d'uniformité

On fixe deux espaces vectoriels normés E et F de dimension finie, une partie non vide $X \subseteq E$, et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions $f_n: X \rightarrow F$.

1. Suites de fonctions

Définition 1 : on dit que (f_n) converge simplement sur X vers $f: X \rightarrow F$ lorsque $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ pour tout $x \in X$, i.e.

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

la fonction f est appelée limite simple de (f_n) sur X .

Exemple 1 : la suite (f_n) définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers $f: x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x=1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Remarque 3 : f n'est pas continue alors que chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$!

Définition 4 : on dit que (f_n) converge uniformément sur X vers $f: X \rightarrow F$ lorsque $\|f_n - f\|_{\infty, X} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in X \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

Proposition 5 : si (f_n) converge uniformément vers f sur X , alors elle converge simplement vers f sur X .

Remarque 6 : réciproque fautive (cf. exemple 2)

Proposition 7 (critère de Cauchy uniforme) : (f_n) converge uniformément sur X si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall p, q \geq N \quad \|f_p - f_q\|_{\infty, X} \leq \varepsilon$.

Proposition 8 : soit $a \in X$. Si (f_n) converge uniformément vers $f: X \rightarrow F$ sur X , et chaque f_n est continue en a , alors f est continue en a .

Corollaire 9 : si (f_n) converge uniformément vers $f: X \rightarrow F$ sur X et chaque f_n est continue sur X , alors f est continue sur X .

Remarque 10 : cela permet de montrer qu'une convergence n'est pas uniforme, par exemple avec $f_n: x \mapsto e^{inx}$ définie sur $[0, 2\pi]$ (cf. exemple 2 aussi).

Théorème 11 (de la double limite) : soit $a \in X$. On suppose que (f_n) converge uniformément sur X vers $f: X \rightarrow F$ et que chaque f_n a une limite $l_n \in F$ en a . Alors la suite $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite $l \in F$, et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$, i.e.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

2. Dérivation et intégration

On suppose que $X = I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle.

Remarque 12 : si chaque f_n est $\mathcal{C}^1$ sur I , la convergence uniforme de (f_n) sur I ne suffit pas pour la dérivabilité de la limite, par exemple avec $f_n: x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.

Théorème 13 : on suppose que :

- chaque f_n est $\mathcal{C}^1$ sur I ,
- (f_n) converge simplement sur I ,
- (f'_n) converge uniformément sur tout compact de I vers $g: I \rightarrow F$.

Alors (f_n) converge uniformément sur tout compact de I vers $f: I \rightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^1$, et $f' = g$.

* non vérifié

Remarque 14 : le théorème 13 s'ad au cas $\mathbb{R}^k$ (c'est-à-dire pour n réel, avec convergence uniforme de $(f_n(x))$ pour tout $x \in \mathbb{R}^k$).

Théorème 15 : si (f_n) converge uniformément vers $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sur I , si chaque f_n est intégrable et si I est compact, alors f est intégrable et $\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n$.

On revient au cas où $X \subseteq \mathbb{R}$ et quelque.

Théorème 16 : supposons que X soit un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, et que (f_n) converge simplement sur X ,

• chaque f_n est différentiable sur X ,

• (df_n) converge uniformément sur tout compact de X vers $g : X \rightarrow \mathbb{R}^k$.

Alors, il existe $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable telle que $df = g$, (f_n) converge simplement vers f sur X , et uniformément sur tout compact de X .

Théorème 17 (Weierstrass) : soient $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert, (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur U qui converge uniformément sur tout compact de U vers $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Alors f est holomorphe, et pour tout $z \in U$, $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout compact de U vers $f^{(k)}$.

DEVI

Théorème 18 : la fonction Gamma d'Euler, définie pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$, par $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$, se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-N\}$, vérifiant :
 $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-N\} \quad \Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)}$.

3. Séries de fonctions

Remarque 19 : les définitions et résultats pour les suites de fonctions se transposent aux séries de fonctions, en remplaçant f_n par $\sum_{k=0}^n f_k$. On introduit une mode de convergence supplémentaire.

Définition 20 : on dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalment sur X lorsque chaque f_n est bornée sur X , et la série de nombres réels $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Proposition 21 : la convergence normale entraîne la convergence uniforme. Application 22 : la fonction ζ de Riemann, définie pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(s) > 1$ par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$, est ∞ sur $\mathbb{C}$ réel.

4. Continuité uniforme

Théorème 23 (Heine) : si $f : E \rightarrow F$ est continue sur un espace $K \subseteq E$, alors f est uniformément continue sur K .

Application 24 (Cours de Riemann) : si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(a + \frac{k(b-a)}{n}) = \int_a^b f(x) dx$.

Exemple 25 : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Théorème 26 (Dini) : supposons que $X = [a, b]$, que $F = \mathbb{R}$, et que chaque f_n soit continue sur $[a, b]$. Si (f_n) converge simplement vers $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, et si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

• (f_n) est croissante (i.e. $f_n \leq f_{n+1}$ pour tout n)

• chaque f_n est une fonction càd sur $[a, b]$

alors la convergence de (f_n) vers f sur $[a, b]$ est uniforme.

Application 27 (Glivenko-Cantelli) : soient $(X, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de fonction de répartition F et F_n la fonction de répartition empirique de $(X_1, \dots, X_n)$: $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i(x)} = \mathbb{P}_n$. Alors (F_n) converge uniformément vers F sur $\mathbb{R}$, P -p.s.

II. Intégration de Lebesgue

On fixe un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et une suite (f_n) de fonctions mesurables $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Théorèmes fondamentaux

Théorème 28 (de convergence monotone) : si chaque f_n est positive et (f_n) est croissante alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$.

Théorème 29 (de convergence dominée) : supposons que :

• (f_n) converge simplement μ -p.s. sur X ,

• $\exists g \in L^1(\mu)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n| \leq g$ μ -p.s.

Alors : $\exists f \in L^1(\mu)$ $f_n \rightarrow f$ μ -p.s., et $\int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$.

Application 30 : $\int_0^\infty \ln(x) e^{-x} dx = -\gamma$ (Constante d'Euler).

Théorème 31 : A la série $\sum \int_x |f| d\mu$ converge, dans les fonctions f_n , $\sum |f_n|$ et la fonction définie par $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ est intégrable, et $\int \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu$.

Application 32 : $\int_0^\infty x^n dx = \sum_{n=1}^\infty n^{-n}$.

On considère un autre espace mesuré $(Y, \mathcal{B}, \nu)$.

Théorème 33 (Fubini-Tonelli, admis) : on suppose que μ et ν sont σ -finies, et que $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ est mesurable.

Alors, dans $[0, +\infty]$:

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) \nu(dy) \right) \mu(dx) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) \mu(dx) \right) \nu(dy).$$

Théorème 34 (Fubini-Lebesgue, admis) : même énoncé en remplaçant f intégrable, égalité dans mesurables dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Application 35 : $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

2. Régularité des fonctions définies par une intégrale

On fixe un espace métrique E , $a \in E$ et une fonction $f : E \times X \rightarrow \mathbb{C}$.

Théorème 36 : supposons que :

- pour tout $t \in E$, la fonction $x \mapsto f(t, x)$ est mesurable,
- pour μ -presque tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est continue en a ,
- $\exists g \in L^1(\mu)$ $\forall t \in E$ $|f(t, x)| \leq |g(x)|$ μ -p.p. $x \in X$.

Alors $F : t \in E \mapsto \int_X f(t, x) \mu(dx)$ est bien définie et continue en a .

Application 37 : si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\hat{f} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 38 : supposons que $E = I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle non vide, et que :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(t, x) \in L^1(\mu)$,
- $\exists t f(a, x)$ existe pour μ -presque tout x ,
- $\exists g \in L^1(\mu)$ $\forall t \in I$ $|f(t, x) - f(a, x)| \leq |t - a| g(x)$ μ -p.p. $x \in X$.

Alors F est bien définie et dérivable en a , avec :

$$F'(a) = \int_X \partial_t f(a, x) \mu(dx).$$

Application 39 : pour $a \in \mathbb{J} \cap \text{Int}(\mathcal{C})$ et $\gamma \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(t) e^{-a \mathcal{F}(t)} (\gamma) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} e^{-\frac{\gamma^2}{2a}}$.

3. Un dictionnaire pour les séries de Fourier

Théorème 40 (Banach-Steinhaus) : soient E, F deux espaces de Banach et $(T_i)_{i \in \mathbb{I}}$ une famille de $\mathcal{L}(E, F)$ telle que, pour tout $x \in E$, $\sum_{i \in \mathbb{I}} \|T_i(x)\| < \infty$. Alors $\sum_{i \in \mathbb{I}} \|T_i\|_{E \rightarrow F} < \infty$.

Application 41 : il existe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue, 2π -périodique, telle que la série de Fourier de f en 0 diverge.

III. Applications en probabilités

1. Fonction caractéristique : premiers paragraphes

Définition 42 : la fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est définie, pour $t \in \mathbb{R}^d$, par :

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{it \cdot X}], \text{ où } t \cdot X = \sum_{i=1}^d t_i X_i.$$

Exemple 43 : si $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, alors $\varphi_X(t) = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$.

Proposition 44 : si X et Y ont des valeurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et indépendants, alors $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$.

Proposition 45 : si X est une variable aléatoire réelle qui admet un moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$, alors $\varphi_X \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto \varphi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}[X^k e^{itX}]$.

2. Marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}^d$

DEV 2

Théorème 46 : soit $d \in \mathbb{N}^*$. On note $(e_1, \dots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{Z}^d$. La marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}^d$, définie par la suite $X_n = \sum_{i=1}^d \beta_i e_i$, avec $\beta_1, \beta_2, \dots$ i.i.d. $\mathcal{U}(\{ \pm e_1, \dots, \pm e_d \})$, est équilibrée si $d=1$ ou $d=2$.

3. Théorème central limite

Théorème 47 (Lévy) : soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles (v.a.r.) et X une v.a.r. Alors (X_n) converge en loi vers X si et seulement si (X_n) converge simplement vers X sur $\mathbb{R}$.

Théorème 48 (Central Limit) : soit (X_n) une suite de v.a.r. i.i.d. et entières centrées. Alors $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$.

Application 49 (formule de Stirling) : si $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$.